תכנית חדשה לכיתות י - 4 יח"ל

התכנית כוללת לפחות 120 שעות לימוד בכיתה י לפי חלוקה זו:

- גאומטריה – לפחות 40 שעות
- אלגברה וחשבון דיפרנציאלי – לפחות 45 שעות
- סטטיסטיקה והסתברות – לפחות 35 שעות

גאומטריה – כיתה י' (40 שעות)

רציונל

התכנית התלת-שנתית בתחומי הגאומטריה מושתתת על מספר יסודות מארגנים:

1. שילוב תחומי הגאומטריה זה בזה.

שלושת תחומי הגאומטריה בתכנית: גאומטריה של המישור, טריגונומטריה, גאומטריה אנליטית, נלמדים בצורה משולבת.

לכל אחד מהתחומים יש מאפיינים ייחודיים משלו. יחד עם זאת, שלושתם מהווים חלק בלתי נפרד מהגאומטריה, ולכן ילמדו בצורה משולבת.

* בגאומטריה של המישור תהיינה שאלות הוכחה הדורשות הנמקה. בנוסף, יעשה שימוש בגאומטריה של המישור לצורך הנמקה / הסבר של השלבים הנעשים בגאומטריה חישובית, טריגונומטריה או הנדסה אנליטית.
* גאומטריה אנליטית הנה תחום בגאומטריה שבה עובדות ותכונות גיאומטריות מתקבלות על ידי חישובים המבוססים על מיקום של אובייקטים גיאומטריים במערכת צירים. ייצוג זה ישמש ככלי להעלאת השערות בנוגע לתכונות של צורות גיאומטריות או ככלי לווידוא תכונותיהן (שהוכחתן יכולה להיעשות למשל באמצעות גאומטריה של המישור), וככלי להוכחת תכונות של צורות גיאומטריות.

  ניתן לעשות זאת למשל, באמצעות חישוב של אורכים, קביעת ניצבות של ישרים וכו'.
* טריגונומטריה היא תחום בגאומטריה שבו היחסים בין אלמנטים של צורות מוצגים בעזרת פונקציות טריגונומטריות של זוויות. ייצוגים אלה משמשים הן ככלי לחישוב אורכים, זוויות, שטחים וכו', והן ככלי להוכחת תכונות של צורות גיאומטריות.
* במגמת שילוב תחומי גאומטריה שונים, חשוב לציין שלצורך הוכחה, יש לתת את הדעת למהות התוצאות המתקבלות כבסיס להמשך טיעון גיאומטרי.

  בפרט, חייבים לבטא תוצאות המתקבלות בצורה מדויקת ולא בקירובים. דוגמאות:

  לכתוב את $\sin 45^0$ כ- $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ולא כ-0.707, להשאיר מספר המתקבל בשורש ולא לחשב את הקירוב שלו (למשל, להשאיר $\sqrt{10}$ ולא בקירוב שלו 3.16).

2. רמת סיבוביות. רמת הסיבוביות הנדרשת בשאלות בגאומטריה תכלול מענה על השאלה במספר שלבים מועט. במידה והשאלה דורשת מספר רב של שלבים, יש לפרק אותה לתת-שאלות פשוטות יותר המבוססות על קודמותיהן בצורה עקבית והיררכית, כך שתת השאלות ישמשו כהכוונה.

3. שילוב טכנולוגיה. מומלץ לשלב שימוש בטכנולוגיה במהלך למידת הנושא. שילוב כזה עשוי לתרום להמחשת הנלמד, לאפשר למידה אינדוקטיבית באמצעות בדיקת מספר רב של מקרים פרטיים, ובעקבות כך אפשרות להעלאת השערות (ולאחר מכן הוכחתן בדרכים המקובלות להוכחה).
4. שילוב אוריינות. יש לשלב שאלות אוריינות, המציגות מצבים מתחומים שונים, בהם ניתן להשתמש בכלים הרלוונטיים מתחומי הגאומטריה השונים.

מטרות כלליות / דגשים

1. התלמיד יפתח חשיבה דדוקטיבית – כולל:
   1. הבנה של הצורך בהוכחה / בהנמקה.
   2. הבנה של מהות ההוכחה. כך, התלמיד יבין שכל טענה צריכה להסתמך על הנתונים שבשאלה ועל ידע קודם (כגון: הגדרות, אקסיומות, משפטים, או מסקנות קודמות שהושגו).
   3. כתיבת הוכחה באמצעות פירוט של רצף טענות המובילות למסקנה המתבקשת – כולל הוכחה בדרך השלילה.

2. התלמיד יפתח חשיבה אינדוקטיבית: בדיקת מקרים פרטיים, העלאת השערות בנוגע לתכונות לאור המקרים הפרטיים ולאחר מכן הוכחתן או הפרכתן של טענות שהעלה. באופן זה, התלמיד גם יבין את הצורך בהוכחה ויבחין בין אישוש לבין הוכחה.

3. התלמיד ידע לעבור בין שלושת הייצוגים בגאומטריה: ייצוג מילולי, ייצוג סימבולי וייצוג ויזואלי, וכן לשלב ביניהם.

4. התלמיד יהיה מסוגל להוכיח משפטים הקשורים לתכונות של צורה גיאומטרית ואת המשפטים ההפוכים, וכן ידע להבחין בין תנאים הכרחיים לתנאים מספיקים – באמצעות כלים שונים משלושת תחומי הגאומטריה :גאומטריה של המישור ,גאומטריה אנליטית, טריגונומטריה.

5. התלמיד יהיה מסוגל להוכיח תכונה בנושא הנלמד, תוך שימוש בהגדרות, אקסיומות, משפטים, או מסקנות קודמות שהושגו - באמצעות כלים שונים משלושת תחומי הגאומטריה : גאומטריה של המישור ,גאומטריה אנליטית, טריגונומטריה.

6. התלמיד ישתמש בידע מכל תחומי הגאומטריה לצורך חישובים ויישומים שונים.

7. התלמיד יפתח מיומנות של שימוש מושכל במחשבון.

8. התלמיד יבין את הצורך בבקרה של התוצאות המתקבלות, ויפתח מיומנות של בקרה.

9. התלמיד ייחשף למצבים אורייניים, מתחומים שונים, שבהם ניתן להשתמש בכלים מכל אחד מתחומי הגאומטריה.

להלן יוצגו התכנים הנלמדים בגאומטריה. בהמשך יוצגו דרכים לשילובם ברצף ההוראה.

גאומטריה של המישור

נושא זה מהווה המשך של למידת הנושא מחטיבת הביניים. פירוט של התכנים הנדרשים ואשר נלמדו בחטיבת הביניים מופיע בנספח א'. בתכנית המוצגת כאן מופיעים רק התכנים החדשים הנלמדים בחטיבה העליונה.

במניין השעות נלקחה בחשבון החזרה הנדרשת על תכונות / משפטים שנלמדו בחטיבת ביניים. חזרה זו ניתן לעשות גם תוך כדי שילוב נושאים אלו בנושאים החדשים הנלמדים.

תכנים

קווים מיוחדים במשולש :

- תיכונים: הגדרה, תכונות התיכונים: נקודת מפגש התיכונים ותכונותיה, התיכון מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח, התיכון ליתר במשולש ישר זווית.

  משפטים:

  * שלושת התיכונים במשולש נחתכים בנקודה אחת.
  * נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס 2:1. (החלק הקרוב לקודקוד הוא פי 2 מהחלק האחר).
  * התיכון מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח.
  * במשולש ישר זווית, התיכון ליתר שווה למחצית היתר.

- חוצי זוויות: הגדרה, תכונת חוצה הזווית כמקום גיאומטרי, נקודת מפגש חוצי הזוויות במשולש, משפט חוצה זווית פנימית במשולש – והמשפט ההפוך.

  משפטים:

  * חוצה הזווית הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים משוקי הזווית.
  * שלושת חוצי הזוויות של משולש נחתכים בנקודה אחת.
  * חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה.
  * ישר העובר דרך קודקוד משולש ומחלק את הצלע שמול קודקוד זה חלוקה פנימית, ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה) הוא חוצה את זווית המשולש שדרך קודקודה הוא עובר.

- <u>אנכים אמצעיים</u>: הגדרה, תכונת האנכים האמצעיים כמקום גאומטרי

משפטים:

* האנך האמצעי הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מקצות הקטע.
* שלושת האנכים האמצעיים לצלעות המשולש נחתכים בנקודה אחת.

- <u>גבהים</u>: הגדרה, נקודת מפגש הגבהים.

משפט:

* שלושת הגבהים במשולש (או ישרים המכילים אותם) נחתכים בנקודה אחת.

הערה: במהלך הוראת הנושא של קווים מיוחדים יש להתייחס לכל סוגי המשולשים: חדי זוויות, ישר זווית, קהה זווית.

<u>דמיון משולשים</u>:

- הגדרה
- משפטי הדמיון (ז.ז., צ.צ.צ., צ.ז.צ)
- יחס ההיקפים במשולשים דומים
- יחס השטחים במשולשים דומים
- יחס הקווים המיוחדים במשולשים דומים

משפטים:

* אם שתי צלעות של משולש אחד מתייחסות באותו יחס לשתי צלעות מתאימות במשולש שני, והזווית שבין הצלעות שווה, אז המשולשים דומים (משפט דמיון צ.ז.צ.).
* אם שתי זוויות במשולש אחד שוות לשתי זוויות במשולש השני, אז המשולשים דומים. (משפט דמיון ז.ז.)
* אם שלוש צלעות של משולש אחד, מתייחסות באותו יחס לשלוש צלעות של משולש שני, אז המשולשים דומים (משפט דמיון צ.צ.צ.).
* במשולשים דומים יחס ההיקפים שווה ליחס הדמיון
* במשולשים דומים יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון
* במשולשים דומים:
  1. יחס גבהים מתאימים שווה ליחס הדמיון.
  2. יחס חוצי זוויות מתאימות שווה ליחס הדמיון.
  3. יחס תיכונים מתאימים שווה ליחס הדמיון.

טריגונומטריה במישור

תכנים

<u>הפונקציות הטריגונומטריות של זווית חדה במשולש ישר זווית</u> :

- הגדרה של הפונקציות הטריגונומטריות: סינוס, קוסינוס, טנגנס של זווית חדה, כיחס צלעות במשולש ישר זווית. שימוש בדמיון משולשים להוכחה שעבור זווית חדה מסוימת מתקבל ערך קבוע לכל אחת מהפונקציות הטריגונומטריות – כלומר, שערך הפונקציה הטריגונומטרית תלוי רק בגודלה של הזווית החדה.

  <u>הערה</u>: במסגרת תכנית זו, מדידת הזוויות היא במעלות בלבד (ולא ברדיאנים).
- תכונות של הפונקציות הטריגונומטריות, עבור זווית חדה, תוך ביסוס על ההגדרה:
  - * כאשר זווית חדה משתנה בין 0° ל- 90°, ערכי הסינוס שלה משתנים בין 0 ל- 1.
  - * כאשר זווית חדה משתנה בין 0° ל- 90°, ערכי הקוסינוס שלה משתנים בין 1 ל- 0.
  - * כאשר זווית חדה משתנה בין 0° ל- 90°, ערכי הטנגנס שלה משתנים בין 0 לאינסוף.
- תכונות של הפונקציות הטריגונומטריות, עבור זווית חדה (יילמדו בצורה בלתי פורמלית, באמצעות התנסות):
  - * פונקציית הסינוס עולה בתחום $0^\circ < \langle < 90^\circ$;
  - * פונקציית הקוסינוס יורדת בתחום $0^\circ < \langle < 90^\circ$;
  - * פונקציית הטנגנס עולה בתחום $0^\circ < \langle < 90^\circ$;
- הרחבת הערכים של פונקציות טריגונומטריות לערכים של 0° ושל 90°:
  - * ערכי סינוס וקוסינוס עבור זווית של 0° ושל 90°;
  - * ערך טנגנס עבור זווית של 0° וחוסר הגדרה עבור 90°;
- הקשר של פונקציית הטנגנס לשיפוע של ישר במערכת צירים.
- קשרים בין הפונקציות הטריגונומטריות: $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,

  $\sin(90^\circ - \langle) = \cos\langle$, $\cos(90^\circ - \langle) = \sin\langle$. הוכחת הקשרים בהסתמך על ההגדרה ו/או משפט פיתגורס.
- חישוב ערכי הפונקציות הטריגונומטריות סינוס, קוסינוס וטנגנס, של הזוויות המיוחדות: 45° , 30° , 60° והוכחה באמצעות תכונות של משולש ישר זווית.
- סינוס של זווית קהה – הגדרה באמצעות הקשר $\sin(180^\circ - \langle) = \sin\langle$.
- מציאת ערך של זווית, באמצעות מחשבון, על סמך הערך של פונקציה טריגונומטרית.
- חישוב של אורכים, זוויות, היקף, שטח במשולש ישר זווית - בהתאם לנתונים במשולש, ותוך שימוש בפונקציות טריגונומטריות ו/או במשפט פיתגורס ו/או בתכונות משולשים ישרי זווית שנלמדו

בגאומטריה של המישור (כגון: תכונת משולש שהוא ישר זווית ושווה שוקיים, תכונת משולש ישר זווית שהזווית החדה שלו $30°$, תכונת התיכון ליתר וכו').

הערה: יש ללוות את שלבי החישוב בהנמקות תוך שימוש בתכונות של הצורה הגיאומטרית.

- חישוב שטח של משולש על פי הנוסחה: $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$.

צורות המתפרקות למשולשים ישרי זווית ו/או למרובעים

חישוב של אורכים, זוויות, היקף, ושטח עבור צורות המתפרקות למשולשים ישרי זווית.

החישובים יתבססו על תכונות של משולשים ומרובעים שנלמדו קודם.

הצורות יכולות להיות כאלה המתפרקות למשולשים או למרובעים בשלב אחד או בשני שלבים.

-

גאומטריה אנליטית

תכנים

<u>נקודות</u>: מערכת צירים, שיעורי נקודות, סימון נקודות במערכת צירים.

<u>קטעים</u> :

- חישוב מרחק בין נקודות (אורך קטע) – במקרה של נקודות היוצרות קטע המקביל לצירים ובמקרה כללי.
- אמצע קטע: מציאת נקודת אמצע קטע על סמך שיעורי קצותיו, או מציאת אחד מקצות הקטע על סמך שיעורי הקצה השני ונקודת האמצע.

<u>ישרים</u> :

- הקשר בין ייצוג אלגברי של ישר לבין ייצוגו הגרפי.
- שיפוע של ישר:
  * משמעות שיפוע ישר:
    - ◦ כיחס בין השתנות ערכי y להשתנות ערכי x של הישר.
    - ◦ כטנגנס של הזווית החדה הנוצרת בין הישר לבין ציר ה- x, בצירוף סימן חיובי כאשר הישר מייצג פונקציה עולה וסימן שלילי כאשר הישר מייצג פונקציה יורדת.
  * התייחסות לישרים המאונכים לכל אחד מהצירים.
- משוואת הקו הישר - בצורה מפורשת ובצורה סתומה.
- הכרת המצבים ההדדיים בין ישרים במערכת צירים בהתאם לייצוגם האנליטי: התלכדות, הקבלה, חיתוך, ניצבות. ציון הקשר בין המצבים האלה לבין שיפועי הישרים.
- מציאת משוואת הקו הישר על פי שיפוע ונקודה – עם אזכור של אקסיומת המקבילים מגאומטריה של המישור "במישור, דרך נקודה מחוץ לישר נתון עובר ישר מקביל אחד ויחיד לישר זה".
- מציאת משוואת הקו הישר על פי שתי נקודות – עם אזכור האקסיומה מגאומטריה של המישור "שתי נקודות מגדירות ישר אחד ויחיד".
- חיתוך ישרים: מציאת נקודות החיתוך של ישר עם הצירים, מציאת נקודת החיתוך של שני ישרים (במידה וקיימת).

משימות אפשריות / מיומנויות – לכל פרק הגאומטריה

בהקשר למצולעים שונים (משולשים, מרובעים וכו'), באמצעות התכונות הגיאומטריות של המצולעים ותוך שימוש בכלים שונים בגאומטריה:

- חישוב של אורכים, זוויות, היקפים, ושטחים.
- העלאת השערה בנוגע לתכונה המתקיימת במצב נתון, ובדיקתה : הפרכה או הוכחה.
- וידוא של תכונה גיאומטרית.
- הוכחה של תכונה.

פרישת הוראה מומלצת על פי תכנית הלימודים בגאומטריה – כיתה י'

תכנון הוראת הגאומטריה, בשילוב של שלושת תחומי הגאומטריה, יכול להיעשות במספר דרכים.

להלן פרישת הוראה מומלצת.

אפשרות מומלצת

נושא: גאומטריה אנליטית – נקודות + קטעים + ישרים (ללא הגדרת השיפוע כטנגנס הזווית החדה – ר' בתכנית)

תכנים נלווים מגאומטריה של המישור: ידע מחטיבת ביניים

דוגמאות: מס' 4, 5, 6

נושא: גאומטריה של המישור – דמיון משולשים

תכנים נלווים מגאומטריה של המישור: ידע מחטיבת ביניים

תכנים נלווים מגאומטריה אנליטית: נקודות + קטעים + ישרים (ללא הגדרת השיפוע כטנגנס הזווית החדה)

דוגמאות: מס' 1, 2, 8

נושא: טריגונומטריה - פונקציות טריגונומטריות של זווית חדה במשולש ישר זווית + צורות המתפרקות למשולשים ישרי זווית ו/או למרובעים

תכנים נלווים מגאומטריה של המישור: דמיון משולשים, ידע מחטיבת ביניים

תכנים נלווים מגאומטריה אנליטית: נקודות + קטעים + ישרים (ללא הגדרת השיפוע כטנגנס הזווית החדה)

דוגמאות: מס' 3, 9, 10, 14, 22, 23, 25

נושא: גאומטריה אנליטית – ישרים – שיפוע של ישר כטנגנס הזווית החדה – ר' בתכנית

תכנים נלווים מגאומטריה של המישור: דמיון משולשים, ידע מחטיבת ביניים

תכנים נלווים מגאומטריה אנליטית: נקודות + קטעים + ישרים

דוגמאות: דוגמה מס' 11, 12, 13

נושא: גאומטריה של המישור – קווים מיוחדים במשולש

תכנים נלווים מגאומטריה של המישור: דמיון + ידע מחטיבת ביניים

תכנים נלווים מגאומטריה אנליטית: נקודות + קטעים + ישרים

תכנים נלווים מטריגונומטריה: פונקציות טריגונומטריות של זווית חדה במשולש ישר זווית + צורות המתפרקות למשולשים ישרי זווית ו/או למרובעים

דוגמאות (כולל שילוב של כל התחומים): מס' 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24

סיכום אפשרות מומלצת

רצף ההוראה	דוגמאות מספר	תכנים נלווים מגאומטריה של המישור	תכנים נלווים מגאומטריה אנליטית	תכנים נלווים מטריגונומטריה
<u>גאומטריה אנליטית</u> - נקודות - קטעים - ישרים (ללא הגדרת השיפוע כטנגנס הזווית החדה)	4, 5, 6	- ידע מחטיבת ביניים		
<u>גאומטריה של המישור</u> - דמיון משולשים	1, 2, 8	- ידע מחטיבת ביניים	- נקודות - קטעים - ישרים (ללא הגדרת השיפוע כטנגנס הזווית החדה)	
<u>טריגונומטריה</u> - פונקציות טריגונומטריות של זווית חדה במשולש ישר זווית - צורות המתפרקות למשולשים ישרי זווית ו/או למרובעים	3, 7, 9, 10, 14, 22, 23, 25	- דמיון משולשים - ידע מחטיבת ביניים	- נקודות - קטעים - ישרים (ללא הגדרת השיפוע כטנגנס הזווית החדה)	
<u>גאומטריה אנליטית</u> - ישרים: שיפוע של ישר כטנגנס הזווית החדה – ר' בתכנית	11, 12, 13	- דמיון משולשים - ידע מחטיבת ביניים	- נקודות - קטעים - ישרים	-
<u>גאומטריה של המישור</u> - קווים מיוחדים במשולש	15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24	- דמיון משולשים	- נקודות - קטעים	- פונקציות טריגונומטריות

סיכום		- ידע מחטיבת ביניים	- ישרים	של זווית חדה במשולש ישר זווית - צורות המתפרקות למשולשים ישרי זווית ו/או למרובעים

אפשרות שנייה

נושא: גאומטריה של המישור – דמיון משולשים

תכנים נלווים מגאומטריה של המישור: ידע מחטיבת ביניים

דוגמאות: מס' 1, 2

נושא: טריגונומטריה - פונקציות טריגונומטריות של זווית חדה במשולש ישר זווית + צורות המתפרקות למשולשים ישרי זווית ו/או למרובעים

תכנים נלווים מגאומטריה של המישור: דמיון משולשים, ידע מחטיבת ביניים

דוגמאות: 3, 7, 10, 25

נושא: גאומטריה אנליטית – נקודות + קטעים + ישרים

תכנים נלווים מגאומטריה של המישור: דמיון משולשים, ידע מחטיבת ביניים

תכנים נלווים מטריגונומטריה: פונקציות טריגונומטריות של זווית חדה במשולש ישר זווית + צורות המתפרקות למשולשים ישרי זווית ו/או למרובעים

דוגמאות: מס' 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 22, 23

נושא: גאומטריה של המישור – קווים מיוחדים במשולש

תכנים נלווים מגאומטריה של המישור: דמיון + ידע מחטיבת ביניים

תכנים נלווים מגאומטריה אנליטית: נקודות + קטעים + ישרים

תכנים נלווים מטריגונומטריה: פונקציות טריגונומטריות של זווית חדה במשולש ישר זווית + צורות המתפרקות למשולשים ישרי זווית ו/או למרובעים

דוגמאות (כולל שילוב של כל התחומים): מס' 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24

סיכום אפשרות שנייה

רצף ההוראה	דוגמאות מספר	תכנים נלווים מגאומטריה של המישור	תכנים נלווים מגאומטריה אנליטית	תכנים נלווים מטריגונומטריה
גאומטריה של המישור - דמיון משולשים	1, 2	- ידע מחטיבת ביניים		
טריגונומטריה - פונקציות טריגונומטריות של זווית חדה במשולש ישר זווית - צורות המתפרקות למשולשים ישרי זווית ו/או למרובעים	3, 7, 10, 25	- דמיון משולשים - ידע מחטיבת ביניים		
גאומטריה אנליטית - נקודות - קטעים - ישרים	4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 22, 23	- דמיון משולשים - ידע מחטיבת ביניים		- פונקציות טריגונומטריות של זווית חדה במשולש ישר זווית - צורות המתפרקות למשולשים ישרי זווית ו/או למרובעים
גאומטריה של המישור - קווים מיוחדים במשולש סיכום אינטגרטיבי של כל התכנים	15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 25	- דמיון משולשים - ידע מחטיבת ביניים	- נקודות - קטעים - ישרים	- פונקציות טריגונומטריות של זווית חדה במשולש ישר זווית - צורות המתפרקות למשולשים

				ישרי זווית ו/או למרובעים

נספח א' – נושאים שנלמדו בחטיבת הביניים

- אקסיומות: האקסיומה שדרך שתי נקודות עובר קו ישר אחד, אקסיומת המקבילים.
- זוויות: סוגי זוויות, זוויות קודקודיות – הגדרה ותכונתן, זוויות צמודות – הגדרה ותכונתן, זוויות הנוצרות בין שני ישרים וחותך: זוויות מתאימות, מתחלפות, חד צדדיות– הגדרה.

המשפטים:

* זוויות צמודות משלימות זו את זו ל- .180°
* זוויות קודקודיות שוות זו לזו.

- ישרים מקבילים: הגדרה, תכונות (תנאים הכרחיים), תנאים מספיקים למקבילות של ישרים - על פי זוויות מתאימות או מתחלפות או חד צדדיות.

משפטים:

* שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתאימות שוות אז שני הישרים מקבילים.
* שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות אז שני הישרים מקבילים.
* שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם סכום זוג זוויות חד-צדדיות הוא 180° אז שני הישרים מקבילים.
* אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי אז:
  1. כל שתי זוויות מתאימות שוות זו לזו.
  2. כל שתי זוויות מתחלפות שוות זו לזו.
  3. סכום כל זוג זוויות חד-צדדיות הוא 180°.

- מצולע: הגדרה של מצולע, סוגי מצולעים: מצולע קעור ומצולע קמור, חישוב היקף מצולע כסכום צלעותיו, חישוב שטח מצולע כסכום שטחי המשולשים המרכיבים אותו, סכום זוויות פנימיות במצולע, מצולע משוכלל – הגדרה.

משפט:

* סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור הוא 180°(n – 2).

- משולשים :

כללי: סכום זוויות במשולש, זווית חיצונית במשולש, סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית, אי שוויונות במשולש, חישוב היקף משולש כסכום צלעותיו, חישוב שטח משולש כמחצית מכפלת צלע המשולש בגובה לצלע זו.

משפטים:

* סכום הזוויות של משולש הוא 180°.
* זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.
* במשולש (שאינו שווה צלעות), מול הצלע הגדולה יותר מונחת זווית גדולה יותר.
* במשולש (שאינו שווה זוויות), מול הזווית הגדולה יותר מונחת צלע גדולה יותר.
* סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
* שטח משולש שווה למחצית מכפלת צלע בגובה לצלע זו.

- חפיפת משולשים: הגדרה, תכונות (תנאים הכרחיים לחפיפה), תנאים מספיקים לחפיפה - שלושת משפטי החפיפה (צ.צ.צ., צ.ז.צ., ז.צ.ז.).

משפטים:

* אם שתי צלעות במשולש אחד שוות לשתי צלעות במשולש שני, וגם הזוויות הכלואות בין הצלעות שוות זו לזו, אז שני המשולשים חופפים (משפט חפיפה צ.ז.צ.(
* אם שתי זוויות במשולש אחד שוות לשתי זוויות במשולש שני, וגם הצלעות הנמצאות בין הזוויות שוות זו לזו, אז שני המשולשים חופפים (משפט חפיפה ז.צ.ז.)
* אם שלוש צלעות במשולש אחד שוות לשלוש צלעות במשולש שני, אז שני המשולשים חופפים (משפט חפיפה צ.צ.צ.)

- קטע אמצעים במשולש: תכונת קטע אמצעים במשולש, תנאים מספיקים לכך שקטע הוא קטע אמצעים במשולש.

משפטים:

* קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
* ישר החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שניה, חוצה את הצלע השלישית.
* קטע שקצותיו על שתי צלעות משולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים.

- משולש שווה שוקיים: הגדרה, תכונותיו בנוגע לזוויות הבסיס, התכונה בנוגע להתלכדות הגובה לבסיס, התיכון לבסיס וחוצה זווית הראש. תנאים מספיקים למשולש שווה שוקיים: שוויון שתיים מזוויותיו, התלכדות שניים מהקווים המיוחדים: גובה, תיכון, חוצה זווית.

משפטים:

* במשולש, מול צלעות שוות נמצאות צלעות שוות או: במשולש שווה שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו.
* במשולש, מול זוויות שוות נמצאות צלעות שוות.
* במשולש שווה שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים.
* אם במשולש חוצה זווית הוא גובה, אז המשולש הוא שווה שוקיים.

* אם במשולש חוצה זווית הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
* אם במשולש גובה הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים.

- <u>משולש ישר זווית</u>: הגדרה, משפט פיתגורס והמשפט ההפוך לו, התיכון ליתר במשולש ישר זווית – המשפט והמשפט ההפוך לו, תכונת הניצב מול זווית בת $30°$ – המשפט והמשפט ההפוך לו, שטח משולש ישר זווית כמחצית מכפלת הניצבים.

משפטים:

* משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.
* משפט פיתגורס ההפוך: משולש בו סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית הוא ישר זווית.
* במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.
* משולש בו התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה הוא משולש ישר זווית.
* אם במשולש ישר זווית, יש זווית חדה של $30°$, אז הניצב מול זווית זו שווה למחצית היתר.
* אם במשולש ישר זווית הניצב שווה למחצית היתר, אז מול ניצב זה זווית שגודלה $30°$

<u>מרובעים</u> :

- <u>כללי</u>: הגדרה, סכום זוויות במרובע, היקף של מרובע כסכום צלעותיו.

- <u>מקביליות</u>: מקבילית, מלבן, מעוין, ריבוע – תכונותיהם (תנאים הכרחיים), תנאים מספיקים להוכחת סוג המרובע המתקבל.

משפטים:

* במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו.
* במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
* במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
* מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
* מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.
* מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית.
* מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.
* במעוין האלכסונים חוצים את הזוויות.
* מקבילית שבה אלכסון הוא חוצה זווית היא מעוין.
* במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
* מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.
* אלכסוני המלבן שווים זה לזה.
* מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.

- <u>דלתון</u>

  * הגדרת הדלתון
  * תכונות הדלתון (תנאים הכרחיים).

  משפט:

  * האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון השני ומאונך לו.

- <u>טרפז</u>

  * הגדרת טרפז, תכונות הטרפז (תנאים הכרחיים), תנאים מספיקים לכך שמרובע הוא טרפז.
  * טרפז שווה שוקיים: הגדרה, תכונות (תנאים הכרחיים), משפטים מספיקים להוכחה שמרובע הוא טרפז שווה שוקיים.
  * קטע אמצעים בטרפז – הגדרה, תכונותיו (תנאים הכרחיים), משפטים מספיקים להוכחה שקטע הוא קטע אמצעים בטרפז.

  משפטים:

  * בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.
  * טרפז בו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים.
  * בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.
  * טרפז בו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.
  * קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.
  * בטרפז, ישר החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השנייה.

- <u>חישוב היקף מרובע על פי נוסחאות:</u>

  * חישוב היקף של מלבן
  * חישוב היקף של ריבוע
  * חישוב היקף של מעוין

- <u>חישוב שטח מרובע על פי נוסחאות:</u>

  * חישוב שטח מקבילית כמכפלת צלע המקבילית בגובה לצלע זו.
  * חישוב שטח מעוין כמחצית מכפלת אלכסוניו.
  * חישוב שטח טרפז כמכפלת הגובה לבסיס במחצית סכום הבסיסים.

  משפטים:

  * שטח מקבילית שווה למכפלת צלע המקבילית בגובה לצלע זו.
  * שטח מעוין שווה למחצית מכפלת האלכסונים.

* שטח טרפז שווה למכפלת הגובה במחצית סכום הבסיסים, או: שטח הטרפז שווה למכפלת הגובה בקטע האמצעים שלו

נספח ב – דוגמאות

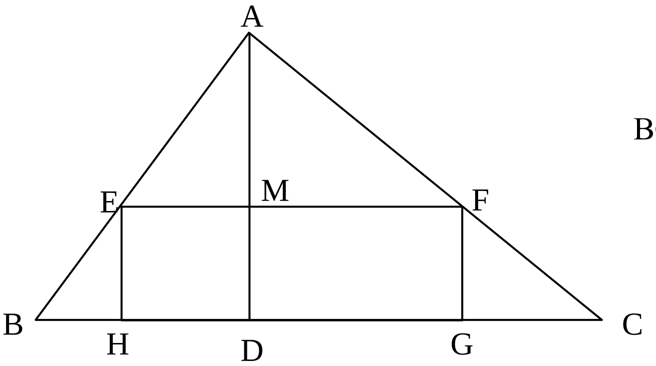
השאלות מדגימות:

- את הרמה הנדרשת בסיום הוראת נושא,
- אפשרויות לשילובים במהלך הוראת נושא.

שאלה בגאומטריה של המישור (דוגמה מס' 1)

במשולש ABC חסום מלבן EFGH כך שהנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות AB ו- AC בהתאמה, והנקודות G ו- H נמצאות על הצלע BC.

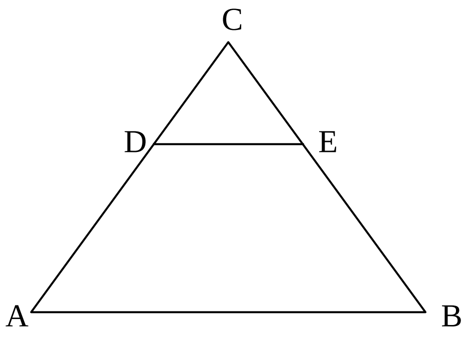
AD הוא הגובה לצלע BC במשולש ABC.



נתון: 15 ס"מ = BC, 27 ס"מ = AD, AF:FC =2:1.

1. (1) הוכיחו כי: ⊗AEF ~ ⊗ABC
   (2) מהו יחס הדמיון?
2. הגובה AD חותך את EF בנקודה M.
   הוכיחו כי: AM הוא גובה במשולש AEF?
3. חשבו את שטח המלבן EFGH.

שאלה בגאומטריה של המישור (דוגמה מס' 2)



משולש ABC הוא משולש שווה שוקיים (AC = BC).

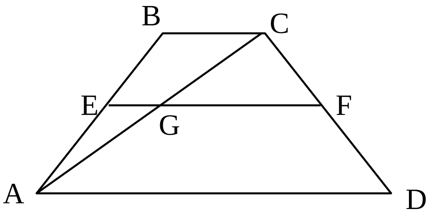
הנקודות D ו- E נמצאות על הצלעות AC ו- BC בהתאמה.

ידוע שאורכי הקטעים CD, DE, CE קטנים פי 3 מאורכי הצלעות AC, AB,BC בהתאמה.

1. הוכיחו כי המרובע ADEB הוא טרפז.
2. נתון בנוסף כי: DE = 6 ס"מ , AC = 15 ס"מ.
   חשבו את שטח הטרפז ADEB.

שאלה בטריגונומטריה (דוגמה מס' 3)

בטרפז שווה שוקיים ABCD, EF הוא קטע אמצעים.



אלכסון הטרפז חותך את קטע האמצעים בנקודה G

כך ש: $EG : GF = 1 : 3$.

1. נתון: $EG = 3$ ס"מ ו- $\sphericalangle CDA = 50°$. חשבו את שטח הטרפז.
2. נתון: $EG = a$ ס"מ ו- $\sphericalangle CDA = 50°$. הביעו את שטח הטרפז באמצעות a.
3. נתון: $EG = 4$ ס"מ ו- $\sphericalangle CDA = 〈$. הביעו את שטח הטרפז באמצעות a ו- 〈.

שאלה בגאומטריה אנליטית (דוגמה מס' 4)

נתון משולש ABC שקודקודיו הם: $B(20,11)$, $C(8,-5)$.

משוואת הצלע AB היא: $y=\frac{2}{5}x+3$ ומשוואת הישר AC היא: $y = 6x – 53$.

1. מצאו את שיעורי הקודקוד A.
2. הנקודה D היא אמצע הצלע AC והנקודה E היא אמצע הצלע AB.
   מצאו את שיעורי הנקודות D ו- E.
3. חשבו את אורך הקטע DE.
4. הראו שהקטע DE מקביל לצלע BC ושווה למחציתו.
5. הישרים CE ו- BD נפגשים בנקודה M. מהו היחס $\frac{EM}{EC}$? נמקו.

שאלה בגאומטריה אנליטית (דוגמה מס' 5)

נתון מרובע ABCD ששיעורי קודקודיו הם $A(0,0)$; $B(1,2)$; $C(7,3)$; $D(6,1)$.

1. שרטטו את המרובע ABCD במערכת הצירים.
2. הוכיחו, במספר דרכים, שהמרובע המתקבל הוא מקבילית.
3. חשבו את אורכי צלעות המקבילית ואת אורכי אלכסוניה.
4. חשבו את שיעורי מפגש אלכסוני המקבילית.

שאלה בגאומטריה אנליטית (דוגמה מס' 6)

נתונה מקבילית ABCD.

השיעורים של שלושת הקודקודים שלה הם: A(-4,-3) ; B(-1,2) ; C(5,4).

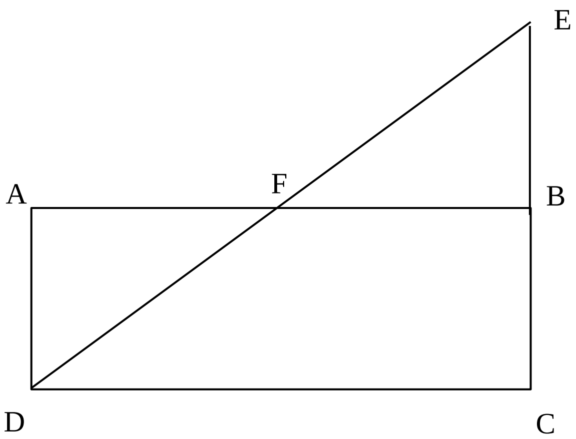
1. חשבו את שיעורי הקודקוד הרביעי של המקבילית (קודקוד D).
2. חשבו את אורכי צלעות המקבילית ואת אורכי אלכסוניה.

שאלה המשלבת טריגונומטריה וגאומטריה של המישור (דוגמה מס' 7)

נתון מלבן ABCD.

נקודה F היא אמצע הצלע AB.

DF חותך עם המשך הצלע BC בנקודה E.



1. הוכיחו כי ⊗AFD ≅ ⊗BFE
2. ידוע כי EC=9 ס"מ, ו- ∢AFD = 40°.
   (1) חשבו את שטח המלבן ABCD.
   (2) חשבו את היחס בין שטח המשולש EBF לשטח המלבן ABCD בשתי דרכים שונות.

שאלה המשלבת גאומטריה אנליטית עם גאומטריה של המישור (דוגמא מס' 8)

(8א') (השאלה במלואה מתאימה לתרגול בביתה)

קודקודי המרובע ABCD הם: A(4,-2) , B(10,0) , C(9,3) , D(3,1)

1. שרטטו את המרובע ABCD במערכת הצירים.
2. מה סוג המרובע ABCD? הסבירו. (שאלה לדיון בביתה)
3. מאריכים את הצלע BC כאורכה, כך ש: BC = CE. מצאו את שיעורי הנקודה E.
4. AE חותך את הצלע CD של מרובע ABCD בנקודה F. הוכיחו כי: ⊗EFC ~ ⊗EAB.
5. (1) מה ניתן לומר על הקטע FC? הסבירו. (שאלה לדיון בביתה)
   (2) חשבו את אורכו של הקטע FC.
6. מצאו את שיעורי הנקודה F.

7. (1) מה סוג המרובע ABCF? הסבירו. (שאלה לדיון בכיתה)
(2) חשבו את שטחו של המרובע ABCF במספר דרכים.
וודאו שהתוצאות המתקבלות זהות בכל הדרכים.
8. הוכיחו כי: ⊗FCE ≅ ⊗FDA
9. חשבו את היחס בין שטח המשולש ECF לשטח המרובע ABCD.
10. האם ⊗EFB הוא משולש שווה שוקיים? הסבירו.
אם כן, מה הקשר בין האורך FB לאורך AE?

<u>הערה</u>: ניתן לשלב בשאלה זו גם משימה בטריגונומטריה (למשל, חישוב זוויות המשולש ECF).

(8ב')

קודקודי המרובע ABCD הם: A(0,0) , B(8,2) , C(10,8) , D(2,6)

1. שרטטו את המרובע ABCD במערכת הצירים.
2. מה סוג המרובע ABCD? הסבירו. (שאלה לדיון בכיתה)
3. מאריכים את הצלע BC כאורכה, כך ש: BC = CE. מצאו את שיעורי הנקודה E.
4. AE חותך את הצלע CD של מרובע ABCD בנקודה F. הוכיחו כי: ⊗EFC ~ ⊗EAB.
5. (1) מה ניתן לומר על הקטע FC? הסבירו. (שאלה לדיון בכיתה)
(2) חשבו את אורכו של הקטע FC.
6. מצאו את שיעורי הנקודה F.
7. מה סוג המרובע ABCF?
8. הוכיחו כי: ⊗FCE ≅ ⊗FDA
9. חשבו את היחס בין שטח המשולש ECF לשטח המרובע ABCD.
10. האם ⊗EFB הוא משולש שווה שוקיים? הסבירו.
אם כן, מה הקשר בין האורך FB לאורך AE?

שאלה המשלבת גאומטריה אנליטית עם טריגונומטריה (דוגמה מס' 9)

נתון מלבן ABCD ששיעורי קודקודיו הם
A(-5,-5) ; B(-6,-1). C(2,1) ; D(3,-3) ;

1. שרטטו את המרובע ABCD במערכת הצירים.
2. חשבו את היקף המלבן ואת שטחו.
3. חשבו את אורכי האלכסונים של המלבן.
4. מצאו את משוואות אלכסוניו.

5. מצאו את נקודת מפגש אלכסוניו.
6. מצאו את הזוויות הנוצרות בין האלכסון לבין צלעות המלבן.
7. מצאו את הזווית בין אלכסוני המלבן.

הערות :

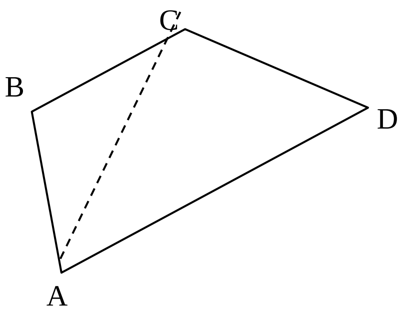
1. במשימה ראשונה ניתן לתת מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים, ובהמשך לתת מלבן שצלעותיו אינן מקבילות לצירים.
2. ניתן להרחיב משימה זו על ידי העברת מקבילים לצלעות המלבן, דרך נקודת מפגש האלכסונים, ולבקש לחשב את ההיקפים / השטחים של המרובעים הנוצרים, וכן את היחס בין היקפים / שטחים אלו להיקף / שטח המלבן המקורי.

שאלה המשלבת גאומטריה של המישור עם טריגונומטריה (דוגמה מס' 10)

בטרפז ABCD, הבסיסים הם AD ו- BC ($BC<AD$).

אורך השוק AB שווה לאורך הבסיס BC.

אורך האלכסון AC שווה לאורך השוק CD.



1. הוכיחו שהאלכסון AC חוצה את $\sphericalangle BAD$.

ידוע כי: $\sphericalangle CAD = 30°$, AB = 5 ס"מ.

2. (1) חשבו את שטח המשולש ABC.

(2) חשבו את AC.

(3) חשבו את שטח הטרפז ABCD.

3. (1) חשבו את היחס שבין שטח המשולש ABC לשטח המשולש ACD.

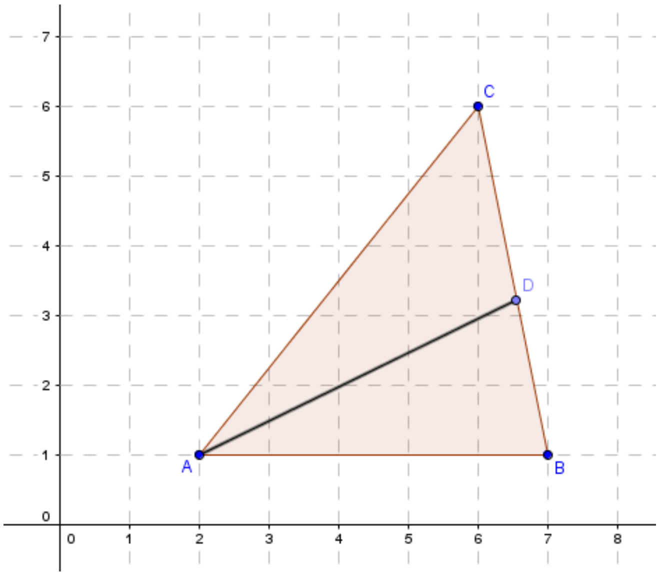
(2) הראו שהיחס שבין שטח המשולש ABC לשטח המשולש ACD שווה ל- $\left(\frac{AC}{AD}\right)^2$.

שאלה המשלבת טריגונומטריה עם גאומטריה אנליטית (דוגמה מס' 11)

(שאלה לדיון בביתה)

לפניכם משולש ABC הממוקם במערכת צירים כמתואר בסרטוט.

AD הוא חוצה זווית של הזווית $\measuredangle BAC$.



על פי הנתונים: הישר העובר דרך AB מקביל לציר ה- x, וכן: $\measuredangle BAC = 2\cdot\measuredangle BAD$.

האם מתקיים ששיפוע הישר העובר דרך AC הוא כפליים שיפוע הישר העובר דרך AD?

נסחו השערה, ובדקו האם היא נכונה במקרה זה. מה המסקנה?

<u>הנחיה</u>: חפשו נקודות על הישרים שבאמצעותן נוח לחשב את השיפועים

<u>הערות</u>

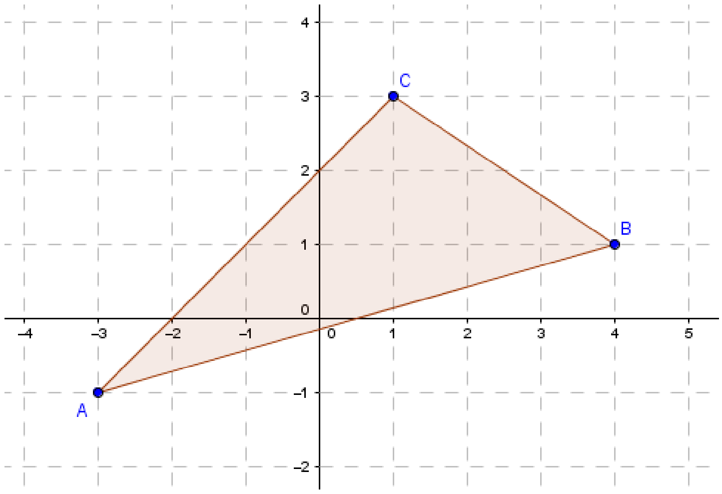
- המטרה בשאלה זו היא להראות, באמצעות דוגמה נגדית, שלא ניתן להחליף את הסדר של שתי הפעולות: כפל בגורם קבוע (2 במקרה זה) ופעולת חישוב ערך הטנגס של הזווית.

  כלומר: $tg(2\cdot\measuredangle BAD) \neq 2\cdot tg(\measuredangle BAD)$

- ניתן לבדוק זאת עבור פונקציות טריגונומטריות אחרות, ולהגיע לכך שמסקנה זו נכונה לגבי כל אחת מהפונקציות הטריגונומטרות.

שאלה המשלבת טריגונומטריה עם גאומטריה אנליטית (דוגמה מס' 12)
(שאלה לדיון בכיתה)

לפניכם משולש ABC הממוקם במערכת צירים כמתואר בסרטוט:



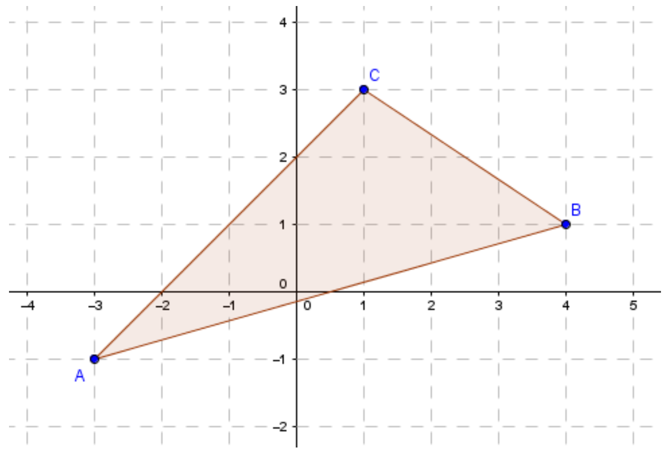
1. מצאו את שיפוע הישר העובר דרך AB.
2. מצאו את שיפוע הישר העובר דרך AC.
3. חשבו את ∢BAC.
4. האם אפשר לטעון כי tg∢BAC שווה להפרש בין שיפועי הישרים העוברים דרך AC ו- AB.
   הסבירו.

<u>הערה</u>

המטרה בשאלה זו היא להראות, באמצעות דוגמה נגדית, כי: tg(〈 - ®) ≠ tg〈 - tg®

שאלה המשלבת גאומטריה אנליטית עם טריגונומטריה (דוגמה מס' 13)

לפניכם משולש ABC הממוקם במערכת צירים כמתואר בסרטוט:



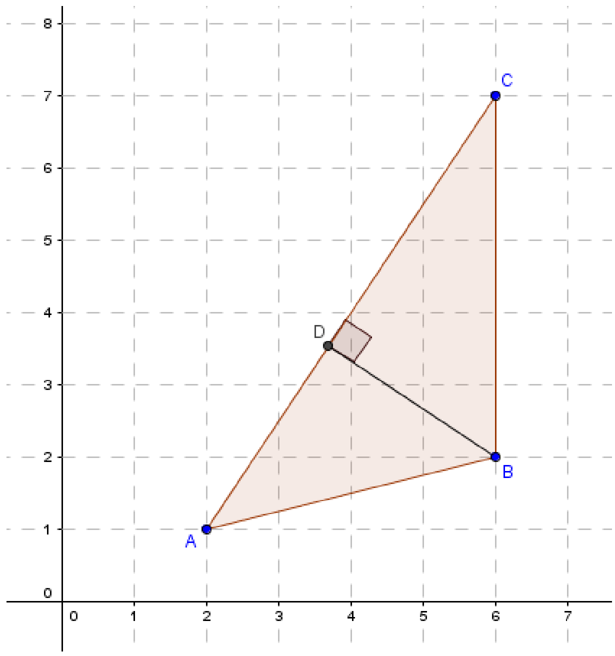
1. מצאו את משוואות הישרים המכילים את צלעות המשולש.
2. מצאו את משוואת הישר המכיל את הגובה לצלע AB.
3. חשבו את זוויות המשולש.
4. חשבו את היקף המשולש.
5. חשבו את שטח המשולש. הציעו דרכים שונות לחישוב.

   האם בכל הדרכים קיבלתם אותו השטח? הסבירו.

   הערה: מומלץ להסביר לתלמיד ששימוש בתוצאות ביניים בייצוג עשרוני מקורב יכול להביא לתוצאות לא זהות.

שאלה המשלבת גאומטריה אנליטית עם טריגונומטריה (דוגמה מס' **14)**

לפניכם משולש ABC הממוקם במערכת צירים כמתואר בסרטוט:



1. מצאו את משוואות הישרים המכילים את צלעות המשולש.
2. מצאו את משוואת הישר המכיל את הגובה (BD) לצלע AC.
3. חשבו את זוויות המשולש ABC.
4. חשבו את היקף המשולש ABC.
5. חשבו את שטח המשולש בדרכים שונות.

ראו הערה לשאלה הקודמת.

שאלה המשלבת גאומטריה אנליטית עם גאומטריה של המישור (דוגמה מס' 15)

תכונת האנך האמצעי

הדגמת הגישה של חשיבה אינדוקטיבית ודדוקטיבית

(שאלה לפתרון בביתה)

נתון קטע AB ששיעורי נקודות הקצה שלו הם: A(__ , __) ; B(__ , __).

- חשבו את שיפוע הישר AB.
- חשבו את שיעורי נקודה C - נקודת אמצע הקטע AB.
- מצאו את משוואת האנך האמצעי לקטע AB

<u>חלק ראשון</u>

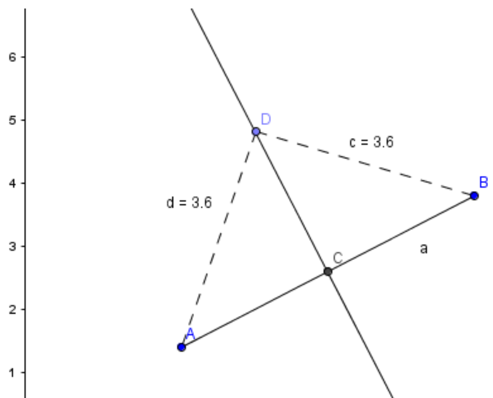
- בחרו נקודה כלשהי D על האנך האמצעי, וחשבו את אורכי הקטעים DA ו- DB.
  מה קיבלתם?
- בחרו נקודה נוספת E על האנך האמצעי וחשבו את אורכי הקטעים EA ו- EB.
  מה קיבלתם?
- חזרו על סעיף ה' עבור נקודות נוספות. מה קיבלתם?
- נסחו השערה בנוגע לנקודה הנמצאת על האנך האמצעי לקטע.
- הוכיחו את השערתכם.

<u>חלק שני</u>

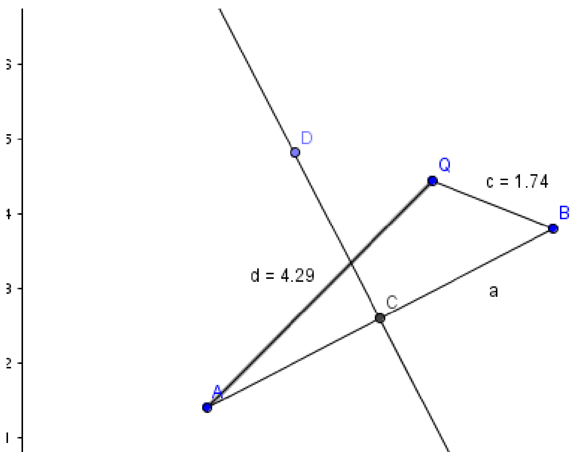
- בחרו נקודה כלשהי Q שאינה נמצאת על האנך האמצעי לקטע AB. חשבו את אורכי הקטעים QA ו- QB. מה קיבלתם?
- חזרו על סעיף ט' עבור נקודות נוספות. מה קיבלתם?
- נסחו השערה בנוגע לנקודה שאינה נמצאת על האנך האמצעי לקטע.
- הוכיחו את השערתכם.

<u>הערה</u>: מומלץ לשלב בפעילות זו שימוש בתכנת מחשב המאפשרת שרטוט צורות גיאומטריות ומדידת אורכים.

דוגמה לסעיף ד'



דוגמה לסעיף ט'



שאלה המשלבת גאומטריה אנליטית עם גאומטריה של המישור (**דוגמה מס' 16**)

נקודות מיוחדות במשולש – נקודת מפגש האנכים האמצעיים

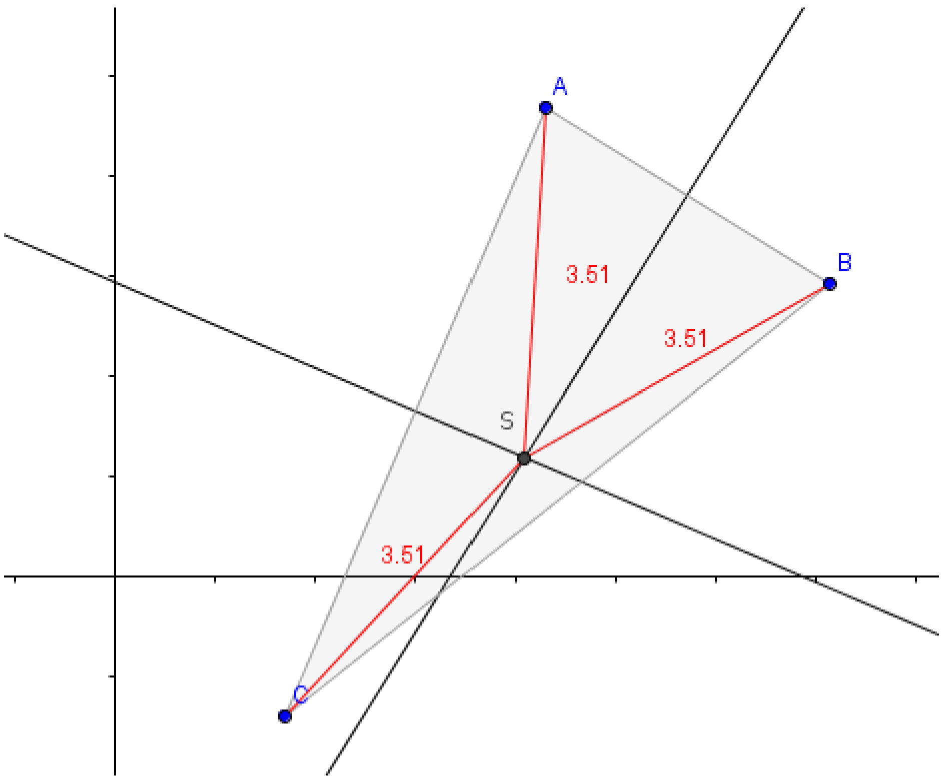
הדגמת הגישה של חשיבה אינדוקטיבית ודדוקטיבית

נתון משולש ABC ששיעורי קודקודיו הם. B(__ , __) ; A(__ , __) C(__ , __) ;

- מצאו את המשוואות של האנכים האמצעיים לצלע AB ולצלע AC.
- מצאו את נקודת החיתוך, S, של שני האנכים האמצעיים שאת משוואותיהם מצאתם בסעיף א'.
- חשבו את אורכי הקטעים: SA , SB , SC. מה קיבלתם?
- חזרו על סעיפים א' – ג' עבור שיעורים אחרים של קודקודי משולש ABC. מה קיבלתם?
- נסחו השערה.
- הוכיחו את השערתכם.

<u>הערה</u>: מומלץ לשלב בפעילות זו שימוש בתכנת מחשב המאפשרת שרטוט צורות גיאומטריות ומדידת אורכים.

לדוגמה:



שאלה המשלבת גאומטריה אנליטית עם גאומטריה של המישור) דוגמה מס' **17**)

נקודות מיוחדות במשולש – נקודת מפגש התיכונים

הדגמת הגישה של חשיבה אינדוקטיבית ודדוקטיבית

נתון משולש ABC ששיעורי קודקודיו הם .(__ , __)B ; (__ , __)A (__ , __)C ;

א. מצאו את המשוואות של התיכונים לצלע AB ולצלע AC.

ב. מצאו את נקודת החיתוך, G, של שני התיכונים שאת משוואותיהם מצאתם בסעיף א'.

ג. וודאו שהתיכון השלישי עובר גם הוא דרך אותה נקודת חיתוך, G.

ד. חשבו את היחס שבו מחלקת נקודה G כל אחד מהתיכונים. מה קיבלתם?

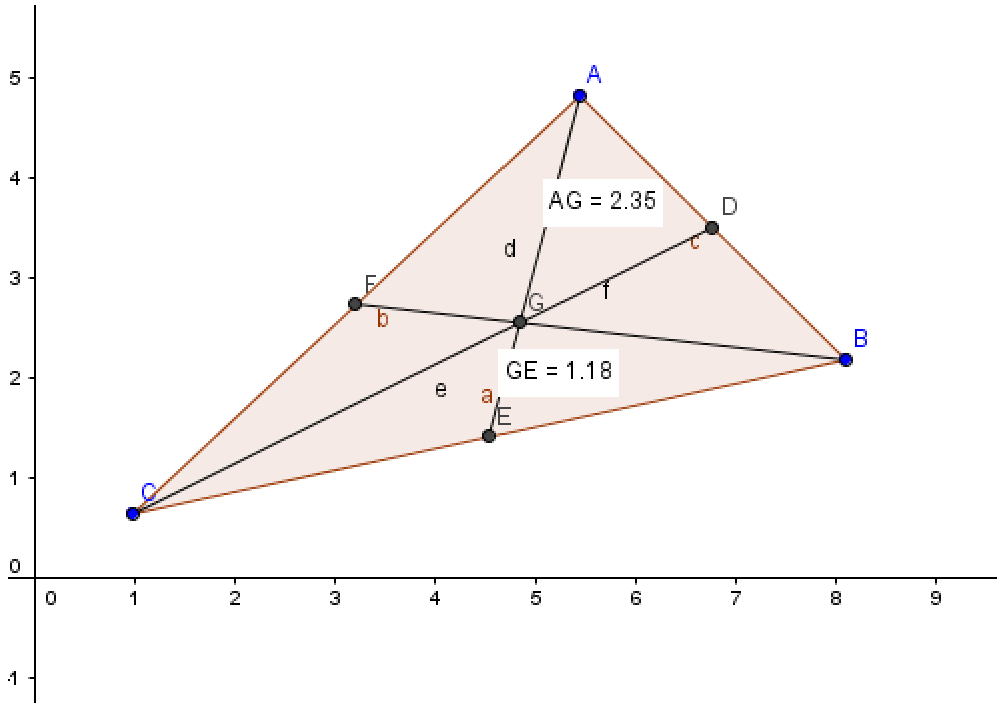
ה. חזרו על סעיפים א' – ד' עבור שיעורים אחרים של קודקודי משולש ABC. מה קיבלתם?

ו. נסחו השערה. (המורה ינסח את המשפט)

<u>הערה</u> :

- מומלץ לשלב בפעילות זו שימוש בתכנת מחשב המאפשרת שרטוט צורות גיאומטריות ומדידת אורכים.
- מומלץ לשלב את השאלה לפני הכרת המשפט על נקודת המפגש של תיכונים במשולש.

לדוגמה:



A
B
C
D
E
F
G
AG = 2.35
GE = 1.18
a
b
c
d
e
f
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
-1

שאלה המשלבת גאומטריה אנליטית עם גאומטריה של המישור (דוגמה מס' 18)

נקודות מיוחדות במשולש – נקודת מפגש הגבהים

הדגמת הגישה של חשיבה אינדוקטיבית ודדוקטיבית

נתון משולש ABC ששיעורי קודקודיו הם: B(__ , __) ; A(__ , __) ; C(__ , __) ;

- מצאו את המשוואות של הגבהים היוצאים מקודקודים A ו- B.
- מצאו את נקודת החיתוך, H, של שני הגבהים שאת משוואותיהם מצאתם בסעיף א'.
- וודאו שהגובה השלישי עובר גם הוא דרך אותה נקודת חיתוך, H.
- חזרו על סעיפים א' – ג' עבור שיעורים אחרים של קודקודי משולש ABC, היוצרים סוגים שונים של משולשים: משולש חד זוויות, משולש ישר זווית, משולש קהה זווית.

  מה קיבלתם עבור משולש חד זוויות? עבור משולש ישר זווית? עבור משולש קהה זווית?
- נסחו השערה בנוגע למפגש הגבהים:

  (1) עבור משולש חד זוויות.

  (2) עבור משולש ישר זווית.

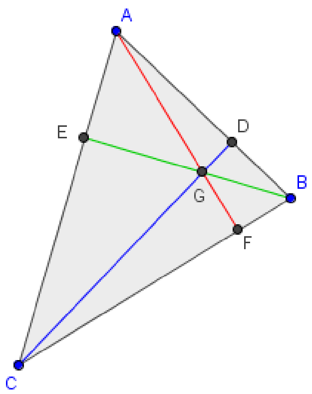
  (3) עבור משולש קהה זווית.
- הוכיחו את השערתכם. (המורה ינסח את המשפט)

<u>הערה</u> :

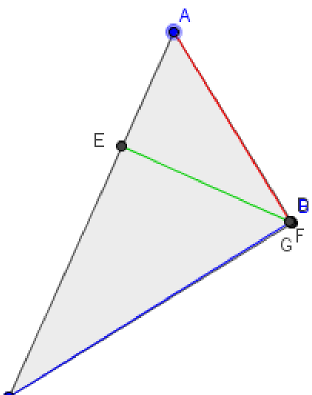
- מומלץ לשלב בפעילות זו שימוש בתכנת מחשב המאפשרת שרטוט צורות גיאומטריות ומדידת אורכים.
- מומלץ לשלב את השאלה לפני הכרת המשפט על נקודת המפגש של גבהים במשולש.

לדוגמה:

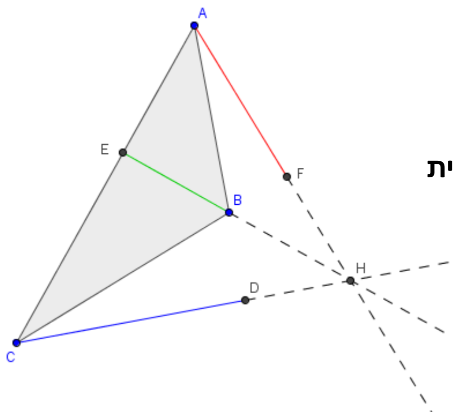
גבהים
במשולש חד זוויות



גבהים
במשולש ישר זווית



גבהים
במשולש קהה זווית

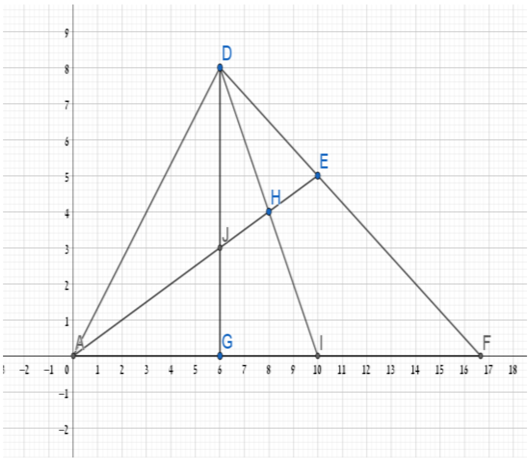


בשאלה זו נחקור את התכונה של חוצה זווית במשולש – משפט חוצה הזווית. (דוגמה מס' 19)

לפניכם כמה משולשים הממוקמים במערכת הצירים כמתואר בסרטוט.

(המשולשים ADG, ADI,ADF).

AE הוא חוצה זווית של הזווית ∢DAF.



1. (1) חשבו את היחס: $\frac{AD}{AF}$ והשוו אותו ליחס $\frac{ED}{EF}$.

   (2) חשבו את היחס: $\frac{AD}{AI}$ והשוו אותו ליחס $\frac{HD}{HI}$.

   (3) חשבו את היחס: $\frac{AD}{AG}$ והשוו אותו ליחס $\frac{JD}{JG}$.

2. נסחו השערה לגבי תכונה של חוצה זווית במשולש.

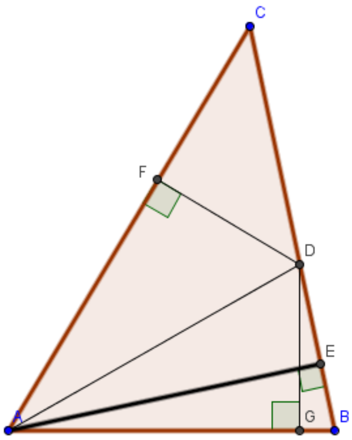
3. הוכיחו את השערתכם.

שאלה בגאומטריה של המישור

הכוונה מדורגת להוכחת משפט חוצה הזווית תוך הסתמכות על שטחים (דוגמה מס' 20)

(שאלה לעבודה ולדיון בכיתה)

במשולש ABC מעבירים את AD, חוצה של $\sphericalangle BAC$, כמתואר בסרטוט:

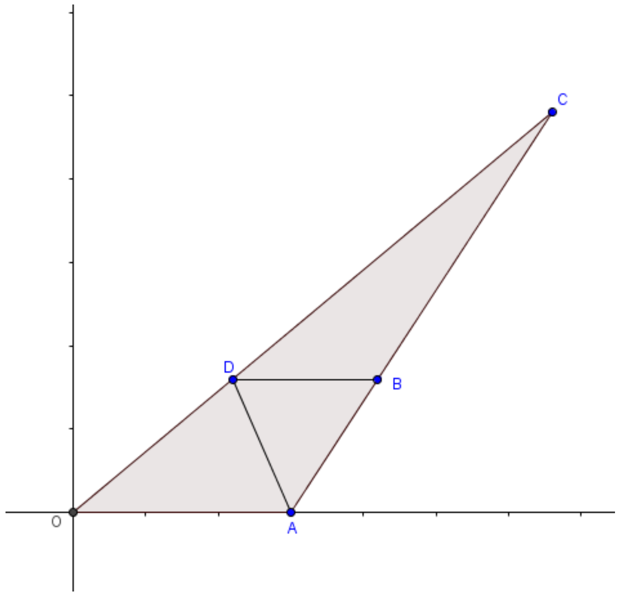


1. הביעו את שטח המשולש ABD באמצעות צלע DB והגובה לצלע זו, ואת שטח ACD באמצעות צלע DC והגובה לצלע זו (שימו לב, AE הוא הגובה המשותף לשני המשולשים). לאחר מכן, חשבו את היחס בין שטחי שני המשולשים.
2. הביעו את שטחי אותם משולשים שבסעיף א', באמצעות צלעות אחרות: הביעו את שטח המשולש ABD באמצעות צלע AB והגובה לצלע זו (DG בשרטוט) ואת שטח המשולש ACD באמצעות צלע AC והגובה לצלע זו (FD בשרטוט).
לאחר מכן, חשבו את היחס בין שטחי שני המשולשים.
3. להזכירכם, נקודה D נמצאת על חוצה הזווית. מה ניתן להסיק מכאן לגבי הגבהים DF ו- DG?
4. השוו את חישוב היחסים בין שטחי שני המשולשים, בשתי הדרכים השונות.
מה הוכחתם? נסחו בכתיב מתמטי ובמילים.

שאלה המשלבת את גאומטריה של המישור עם גאומטריה אנליטית ועם טריגונומטריה

(דוגמה מס' 21)

בסרטוט שלפניכם נתון משולש OAC, ונתון כי: $A(15\ ,\ 0)\ ,\ B(21\ ,\ 8)\ ,\ C(33\ ,\ 24)$



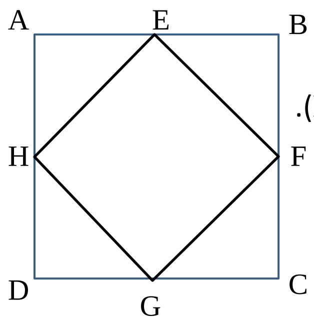
דרך נקודה B מעבירים ישר מקביל לציר ה- x. הישר חותך את הצלע OC בנקודה D.

1. מצאו את שיעורי הנקודה D.
2. הראו כי $DB = AB$.
3. הראו כי $\frac{CA}{OA} = \frac{CB}{AB}$ (הראו הן באמצעות גאומטריה של המישור והן באמצעות גאומטריה אנליטית).
4. הוכיחו כי AD חוצה את זווית CAO.
5. חשבו את $\sphericalangle BAO$ ואת $\sphericalangle BAD$.

שאלות המשלבת גאומטריה אנליטית עם גאומטריה של המישור ועם טריגונומטריה

(דוגמה מס' 22)

(שאלה לעבודה בכיתה)



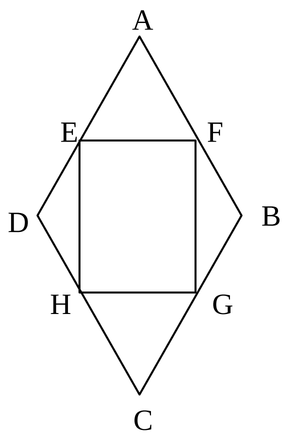
1. נתון ריבוע (בסרטוט: ABCD).

   מחברים את אמצעי צלעותיו לפי הסדר, כך שמתקבל מרובע (בסרטוט EFGH).

   (1) מהו סוג המרובע המתקבל (מרובע EFGH)? הוכיחו.

   (2) מה היחס בין היקף המרובע המתקבל להיקף הריבוע הנתון? הוכיחו.

   (3) מה היחס בין שטח המרובע המתקבל לשטח הריבוע הנתון? הוכיחו.



2. נתון מעוין (בסרטוט: ABCD).

   מחברים את אמצעי צלעותיו לפי הסדר, כך שמתקבל מרובע (בסרטוט EFGH).

   (1) מהו סוג המרובע המתקבל (מרובע EFGH)? הוכיחו.

   (2) מה היחס בין שטח המרובע המתקבל לשטח המעוין הנתון? הוכיחו.

3. נתון מלבן ABCD, הממוקם במערכת צירים כמתואר בסרטוט:

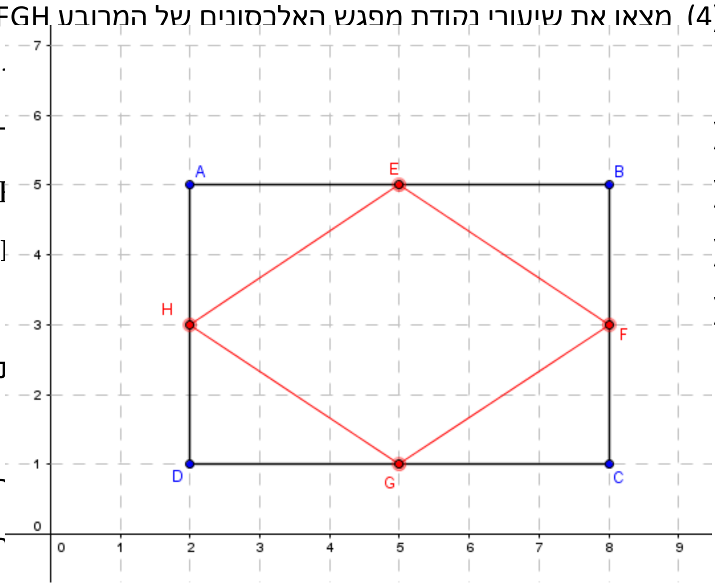
   מחברים את אמצעי צלעותיו לפי הסדר, כך שמתקבל מרובע EFGH.

   (1) מה שיעורי נקודות אמצע הצלעות: E, F, G, H.

   (2) חשבו את אורכי צלעות המרובע EFGH.

(3) חשבו את זוויות המרובע EFGH.

(4) מצאו את שיעורי נקודת מפגש האלכסונים של המרובע EFGH, וחשבו את היחס שבו



ובע זה.

) רכים).

) ?EI

) ?EI

)

נון, מתקבל המרובע שקבעת

תקבל? הוכיחו.

תקבל? הוכיחו.

4. נתון מרובע כלשהו.

מחברים את אמצעי צלעותיו לפי הסדר.

מהו סוג המרובע המתקבל? הוכיחו.

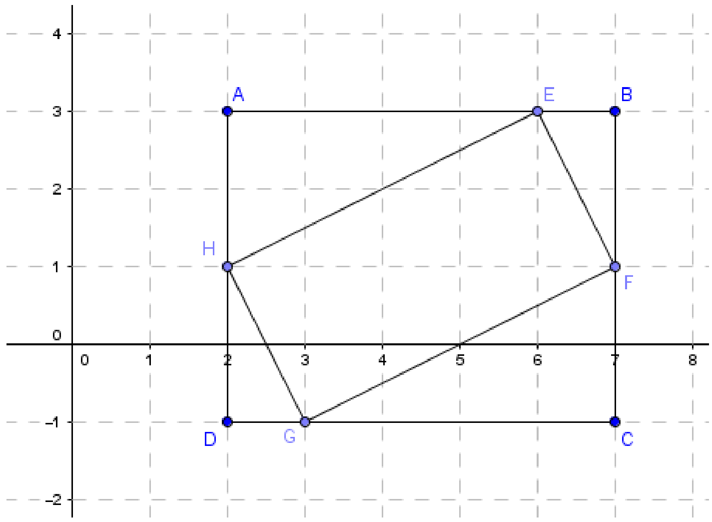
<u>הערה</u>: לאורך כל הפעילות, מומלץ להשתמש בתוכנת מחשב לצורך העלאת השערה בנוגע למרובע המתקבל, ולאחר מכן להוכיח את ההשערה באמצעות גאומטריה של המישור.

שאלות המשלבת גאומטריה אנליטית עם גאומטריה של המישור ועם טריגונומטריה

(דוגמה מס' 23)

(שאלה לעבודה בביתה)

לפניכם מלבן ABCD, הממוקם במערכת צירים כמתואר בסרטוט:



(1) מה שיעורי הנקודות: E, F, G, H.

(2) חשבו את אורכי צלעות המרובע EFGH ואת אורכי אלכסוניו.

(3) חשבו את זוויות המרובע EFGH (אפשרי במספר דרכים).

(4) מצאו את שיעורי אמצע האלכסון האחד, ואת אמצע האלכסון השני. מה קבלתם?

(5) מהו סוג המרובע EFGH שהתקבל? נמקו (אפשרי במספר דרכים).

(6) מה היחס בין היקף המלבן ABCD לבין היקף המרובע EFGH?

(7) מה היחס בין שטח המלבן ABCD לבין שטח המרובע EFGH?

(8) באופן כללי, כאשר נתון מלבן ABCD שבו מתקיים היחס 5:4=AB:BC

ונקודות E, F, G, H מונחות על צלעות המלבן ביחס שתואר לעיל

(AE: EB = 4:1 , BF:FC = 1:1 , CG:GD = 4:1 , DH:AH = 1:1),

מה המרובע המתקבל?

שאלה המשלבת גאומטריה של המישור עם גאומטריה אנליטית ועם טריגונומטריה

אלגברה וחשבון דיפרנציאלי – כיתה י' (לפחות 45 שעות)

מבוא

במסגרת העיסוק באלגברה נחזור על נושאים שנלמדו בחטיבת הביניים ונעמיק בהם.

בהמשך ללימוד פונקציה קווית ופונקציה ריבועית ונושאים נוספים בקדם אנליזה עבור פונקציות פשוטות, התלמידים יעסקו בקדם אנליזה של פונקציות נוספות.

בתחום החשבון הדיפרנציאלי , בכיתה י', ההתייחסות היא לפונקציות פולינומיאליות ולפונקציית השורש הריבועי.

הטיפול במושג הגבול ברמה של 4 יחידות הוא אינטואיטיבי. השימוש בגבול מוצג לראשונה כאשר נלמד מושג הנגזרת.

אלגברה

הערה: חזרה והעמקה בטכניקות אלגבריות ישולבו במהלך לימוד הנושאים השונים לפי הצורך.

מטרות על

1. שליטה בטכניקות אלגבריות כהכנה לשימוש בהן בחשבון דיפרנציאלי.
2. הכרת שיטות לפתרון של משוואות ואי שוויונות.
3. הבנת ההבדל בין פתרון של משוואה לבין פתרון של אי שוויון.
4. הבנת הקשר בין פתרון אלגברי של משוואה / אי שוויון לבין המשמעות הגרפית שלו (נקודות אפס של גרף פונקציה, תחומי חיוביות ושליליות של פונקציה).
5. הבנת הקשר בין פתרון אלגברי של מערכת משוואות לבין המשמעות הגרפית שלו (חיתוך גרפים של פונקציות).

טכניקה אלגברית בסיסית

תכנים

- פירוק לגורמים:
  * פירוק לגורמים על ידי הוצאת גורם משותף
  * פירוק לגורמים, על פי נוסחאות הכפל המקוצר
  * פירוק הטרינום הריבועי
  * שימוש בפירוק לגורמים לצורך פתרון משוואות או אי שוויונות
  * שימוש בפירוק לגורמים לצורך פעולות בשברים אלגבריים

- חוקי חזקות
- שורשים ריבועיים: מכפלת שורשים ומנתם, הכנסת גורם מתחת לשורש, הוצאת גורם מתוך השורש

פתרון משוואות ואי-שוויונות ממעלה ראשונה ושנייה

תכנים

- פתרון משוואה ממעלה ראשונה
- פתרון משוואה ממעלה שנייה
- פתרון מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים - לכל היותר ממעלה שנייה
- המשמעות הגרפית של מספר הפתרונות של משוואה או מערכת משוואות
- אי שוויונות ממעלה ראשונה ואי שוויונות ממעלה שנייה
- המשמעות האלגברית והמשמעות הגרפית של $f(x) > g(x)$

פתרון של משוואות מסוגים שונים

תכנים

- פתרון משוואות הכוללות שברים אלגבריים
- פתרון משוואה אי רציונלית עם שני שורשים לכל היותר, ברמה הנדרשת לחקירת פונקציית שורש
- פתרון משוואה על ידי הצבה, כגון משוואה דו ריבועית
- המשמעות הגרפית של מספר הפתרונות של משוואה או מערכת משוואות

קדם אנליזה (לפחות 12 שעות)

מטרות על

הכרת משפחות של פונקציות.

הכרת תכונות של פונקציות: תחום הגדרה, חיוביות ושליליות, עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון (ללא שימוש בנגזרת), זוגיות ואי זוגיות.

טרנספורמציות של פונקציות:

- הזזות, מתיחות / כיווצים
- שיקופים ביחס לצירים
- ערך מוחלט

תכנים

- חזרה על חקירת פונקציות לינאריות וריבועיות (נקודות חיתוך עם הצירים, נקודת מינימום / מקסימום של פונקציה ריבועית, תכונת הסימטריה של פונקציה ריבועית, עלייה וירידה, חיוביות ושליליות).
- פונקציה זוגית ואי זוגית.

- פונקציות מהצורה $f(x) = x^n$, n –טבעי ותכונותיהן. (נקודות חיתוך עם הצירים, נקודת מינימום / מקסימום, תכונת הסימטריה, עלייה וירידה, חיוביות ושליליות, זוגיות ואי זוגיות).
- הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$, ותכונותיה ותחום הגדרתה.
- הזזה אנכית של פונקציה (המשמעות האלגברית והמשמעות הגרפית)

הפונקציה $y = f(x) + k$ היא הזזה של הפונקציה $y = f(x)$ ב- k יחידות (k יחידות כלפי מעלה עבור k חיובי או k יחידות כלפי מטה עבור k שלילי)

- הזזה אופקית של פונקציה (המשמעות האלגברית והמשמעות הגרפית):

הפונקציה $y = f(x - p)$ היא הזזה של הפונקציה $y = f(x)$ ב- p יחידות (p יחידות ימינה עבור p חיובי או p יחידות שמאלה עבור p שלילי).

- שיקוף של פונקציה (המשמעות האלגברית והמשמעות הגרפית):

הפונקציה: $y = -f(x)$ היא שיקוף של הפונקציה $y = f(x)$ ביחס לציר ה- x.

- שיקוף של פונקציה (המשמעות האלגברית והמשמעות הגרפית):

הפונקציה: $y = f(-x)$ היא שיקוף של הפונקציה $y = f(x)$ ביחס לציר ה- y.

- מתיחה / כיווץ של פונקציה (המשמעות האלגברית והמשמעות הגרפית):

הפונקציה $y = a\cdot f(x)$ מכווצת או מותחת את הפונקציה $y = f(x)$

(עבור $|a|>1$ הפונקציה מתכווצת, ועבור $|a|<1$ הפונקציה נמתחת).

- ערך מוחלט של פונקציה (המשמעות האלגברית והמשמעות הגרפית).

תכנים נלווים:

פירוק לגורמים, פתרון משוואות ואי שוויונות.

הערה:

מומלץ להשתמש בכלים טכנולוגיים כדי להמחיש את הטרנספורמציות של הפונקציות.

חשבון דיפרנציאלי (לפחות 33 שעות)

מטרות על

- הכרת מושגי יסוד בחשבון דיפרנציאלי .
- הכרת הפונקציה הפולינומיאלית ופונקציית השורש הריבועי.
- הכרת הנגזרת ככלי לחקירת פונקציות, למציאת משוואת משיק, ולפתרון בעיות ערך קיצון

חשבון דיפרנציאלי של פונקציות פולינומיאליות (לפחות 15 שעות)

תכנים

- קצב שינוי אחיד וקצב שינוי משתנה של פונקציה
- הנגזרת:
  * הגדרת הנגזרת בנקודה והמשמעות הגאומטרית של הנגזרת
  * הנגזרת של x^k (k טבעי או 0)
  * נגזרות של סכום והפרש של פונקציות $[f(x) \pm g(x)]'$
  * נגזרת של כפל פונקציה בקבוע $[cf(x)]'$
  * נגזרת של מכפלה של פונקציות $[f(x)g(x)]'$
  * נגזרת של פונקציה מורכבת $[f(g(x))]'$ (שני שלבים בלבד)
- שימושי הנגזרת:
  * למציאת שיפוע משיק לגרף של פונקציה בנקודה שעל גרף הפונקציה
  * למציאת משוואת משיק לגרף הפונקציה בנקודה שעל גרף הפונקציה
- חקירת הפונקציה הפולינומיאלית:
  * תחום הגדרה
  * זוגיות או אי-זוגיות של פונקציה באופן אלגברי ובאופן גרפי
  * נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים
  * תחומי העלייה והירידה של הפונקציה
  * נקודות קיצון של הפונקציה – כולל קיצון בקצה תחום ההגדרה של הפונקציה, וכולל קיצון מקומי וקיצון מוחלט
  * סרטוט סקיצה של גרף פונקציה במסגרת חקירה של פונקציה
- הקשר בין גרף פונקציה לגרף הנגזרת שלה
- שימוש בפרמטרים למציאת משוואת המשיק או לחקירת הפונקציה
- שילוב מושגים ומיומנויות שנלמדו בפרק קדם אנליזה

הערה: מושג נגזרת שנייה – מחוץ לתכנית הלימודים ברמה של 4 יח"ל.

חשבון דיפרנציאלי של פונקציית שורש (לפחות 10 שעות)

- תחום ההגדרה של פונקציה מהצורה $y = \sqrt{f(x)}$ ($f(x)$ פולינום ממעלה שנייה לכל היותר)
- הנגזרת של פונקציה מהצורה $y = \sqrt{f(x)}$ ($f(x)$ פולינום ממעלה שנייה לכל היותר)
- הנגזרת של סכומים והפרשים של פונקציה מהצורה $y = \sqrt{f(x)}$ ($f(x)$ פולינום ממעלה שנייה לכל היותר) ופונקציה פולינומיאלית
- הנגזרת של פונקציה מהצורה $y = g(x)\sqrt{f(x)}$ ($g(x)$ $y = g(x) \cdot \sqrt{f(x)}$ פולינום ממעלה שנייה לכל היותר $f(x)$, פולינום ממעלה ראשונה לכל היותר)
- שימושי הנגזרת:
  * למציאת שיפוע משיק לגרף של פונקציה בנקודה שעל גרף הפונקציה
  * למציאת משוואת משיק לגרף הפונקציה בנקודה שעל גרף הפונקציה
- חקירת פונקציה:
  * תחום הגדרה
  * זוגיות או אי-זוגיות של פונקציה באופן אלגברי ובאופן גרפי
  * נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים
  * תחומי העלייה והירידה של הפונקציה
  * נקודות קיצון של הפונקציה – כולל קיצון בקצה תחום ההגדרה של הפונקציה, וכולל קיצון מקומי וקיצון מוחלט
  * סרטוט סקיצה של גרף פונקציה במסגרת חקירה של פונקציה
- הקשר בין גרף פונקציה לגרף הנגזרת שלה
- שימוש בפרמטרים למציאת משוואת המשיק או לחקירת הפונקציה
- שילוב מושגים ומיומנויות שנלמדו בפרק קדם אנליזה

בעיות ערך קיצון (לפחות 8 שעות)

תכנים

- פתרון בעיות קיצון בתחום פתוח ובתחום סגור עבור פונקציה פולינומיאלית ופונקציית שורש
- בעיות הקיצון יעסקו בבעיות מספרים; פונקציות וגרפים; בעיות גאומטריות במישור ; בעיות כלכליות.

הערה : מומלץ לשלב בעיות ערך קיצון במהלך ההוראה של כל אחד מסוגי הפונקציות.

נספח: דוגמאות לשאלות על פי נושאי הלימוד

הדוגמאות מסמנות יעדים ומדגימות פעילויות שתואמות את ההדגשים בתכנית החדשה ואת הערך המוסף שלה.
חשוב לציין שבנוסף למשימות המוצעות ברוח התכנית יש לכלול משימות רגילות שיתרמו להבנה ולשליטה בחומר ויפתחו את היכולות הטכניות של התלמידים בהדרגה. אין צורך לכלול משימות שכולן טכניות או ברמת מורכבות גבוהה באופן משמעותי מהדוגמאות המובאות.

חלק א – דוגמאות מתוך "ללמוד וללמד אנליזה"

http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Mazkirut_Pedagogit/Matematika/ChativaElyona/Analiza.htm

דוגמה 1

האם נכון ש...?

אם כן – הסבירו מדוע.

אם לא – הביאו דוגמה נגדית.

א. פונקציה $\left|f\left(x\right)\right|$ היא **בהכרח** פונקציה זוגית.

ב. פונקציה $f\left(\left|x\right|\right)$ היא **בהכרח** פונקציה זוגית.

ג. הגרף $y=\left|f\left(x\right)\right|$ עובר **בהכרח** דרך ראשית הצירים.

ד. הגרף $y=f\left(\left|x\right|\right)$ עובר **בהכרח** דרך ראשית הצירים.

ה. כל ערכי הפונקציה $\left|f\left(x\right)\right|$ הם אי-שליליים.

ו. כל ערכי הפונקציה $f\left(\left|x\right|\right)$ הם אי-שליליים.

<u>דוגמה 2</u>

נתבונן בגרפים של הפונקציות (איורים 5א – 5ד):

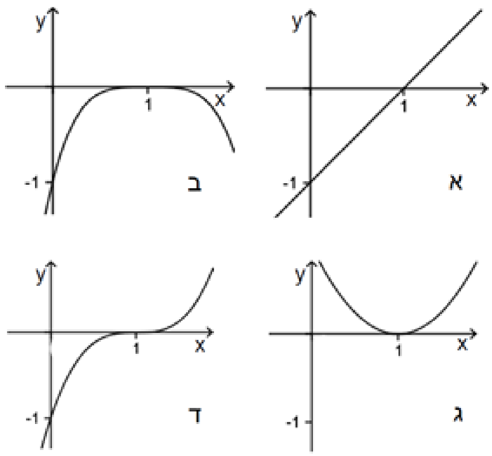
$$f(x)=x-1$$

$$g(x)=(x-1)^2$$

$$h(x)=(x-1)^3$$

$$k(x)=-(x-1)^4$$

- זהו איזה גרף שייך לכל פונקציה. הסבירו מדוע.



איור 5

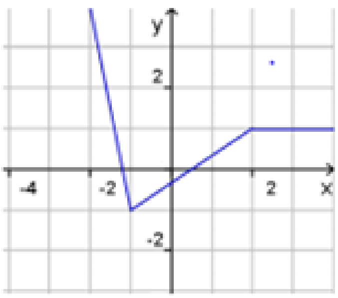
<u>דוגמה 3</u>

לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$

סרטטו גרפים של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)-4$ ג. $f(x-2)$ ה. $f(x+2)-1$

ב. $f(x+3)$ ד. $f(x-1)+2$ ו. $-f(x)$

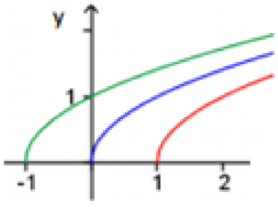


דוגמה 4

במערכת הצירים מופיעים הגרפים של הפונקציות:

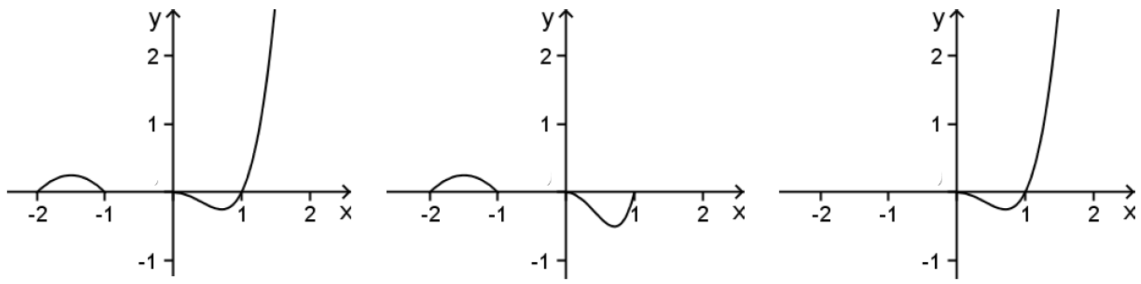
א. $y=\sqrt{x}$ ב. $y=\sqrt{x+1}$ ג. $y=\sqrt{x-1}$.

זהו מהו הגרף המתאים לכל אחת מן הפונקציות.



דוגמה 5 (זוגיות/אי זוגיות)

השלימו כל אחד מהגרפים שלפניכם כך שיתאים לפונקציה זוגית. אם המשימה אינה אפשרית הסבירו מדוע.



דוגמה 7 (זוגיות/אי זוגיות)

השלימו את הטבלה שלפניכם אם ידוע שהיא מייצגת פונקציה אי-זוגית.

x	-3	-1	0	1	3
$f(x)$	1	-2			

חלק ב – דוגמאות בחשבון דיפרנציאלי

דוגמה 1

נתונה הפונקציה: $f(x) = -x^4 + 2x^3 - x^2$

1. מהן נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים?
2. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה? מצא את שיעוריהן וקבע את סוגן.
3. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
4. נתון הישר: $y = k$. עבור אילו ערכים של k יש לגרף הפונקציה:
   (1) 4 נקודות חיתוך עם הישר?
   (2) 3 נקודות חיתוך עם הישר?
   (3) 2 נקודות חיתוך עם הישר?

דוגמה 2

נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

1. מהן נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים?
2. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה? מצא את שיעוריהן וקבע את סוגן.
3. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
4. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה: $g(x) = |f(x)|$

דוגמה 3

נתונה הפונקציה : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2$

1. מצאו את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.
2. מצאו את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
3. מצאו את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.
4. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
5. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = 0$? נמק.
6. מהו המספר המקסימלי של נקודות חיתוך שיש לגרף הפונקציה עם הישר $y = p$? עבור אילו ערכי p מספר מקסימלי זה יתקבל?
7. נתונה פונקציה חדשה $g(x) = f(x) + k$. מהו ערך של k עבורו הגרף של $g(x)$ משיק לישר $y = 3$:
   (i) בנקודת המקסימום שלה.
   (ii) בנקודת המינימום שלה.

דוגמה 4

נתונה הפונקציה : $f(x)=-x^2\sqrt{x+5}$

1. חקרו על פי שלבים את הפונקציה הנ"ל: מצאו תחום הגדרה, מצאו נקודות חיתוך עם הצירים, מצאו נקודות קיצון וסווג אותן, קבעו תחומי עלייה וירידה ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
2. היעזרו בסעיף א ומצאו את שיעורי נקודות הקיצון של:

   (i) $h(x)=f(x-2)$

   (ii) $k(x)=-f(x)+3$

דוגמה 5

נתונה הפונקציה $f(x) = 4x^3 - 3x$.

1. קבעו אם הפונקציה זוגית או אי זוגית. נמקו.
2. נתון כי הנקודה $(0.5,1)$ היא נקודת מינימום של הפונקציה. קבעו מבלי לבצע חישובים נוספים, מהי נקודת הקיצון הנוספת וקבעו את סוג הקיצון. נמקו.
3. מבלי לבצע חישובים נוספים קבעו עבור אילו ערכים של x:
   1. $f'(x) = 0$. נמקו.
   2. $f'(x) > 0$. נמקו.
   3. $f'(x) < 0$. נמקו.
4. שרטטו את גרף הפונקציה.
5. על סמך הסעיפים הקודמים, שרטטו את גרף הנגזרת של הפונקציה.

דוגמה 6

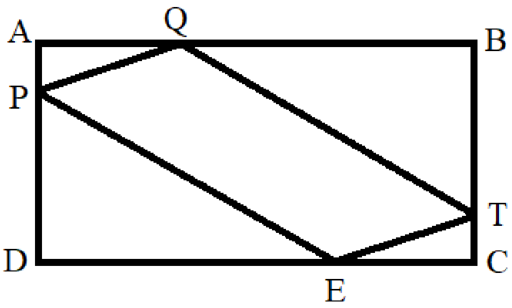
א) נתונה הפונקציה $f(x) = 2(x - 5)^2$.
   1. מהן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים?
   2. מהי נקודת הקיצון של הפונקציה?
   3. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב) מגדירים פונקציה חדשה: $g(x) = f(x) - 4$. האם נקודות הקיצון של שתי הפונקציות זהות? אם לא, מהי נקודת הקיצון של g(x)?

ג) מגדירים פונקציה חדשה: $h(x) = |g(x)|$. מהן נקודות הקיצון של h(x)?

ד) מצאו עבור אילו ערכים של k, יש למשוואה $h(x) = k$:
   1. פתרון אחד.
   2. שני פתרונות.
   3. שלושה פתרונות.
   4. ארבעה פתרונות.
   5. אין פתרון.

דוגמה 7



במלבן ABCD נתון:

18 ס"מ = AB, ‏10 ס"מ = BC.

במלבן חסומה מקבילית PQTE, כך ש- AP = TC

ו- 3AQ = EC = AP.

א. חשב את האורך של הקטע AP עבורו השטח של המקבילית יהיה מקסימלי.

ב. מצא את השטח המקסימלי של המקבילית.

דוגמה 8

מפעל מייצר מוצר מסוים שעלות הייצור שלו הוא 20 ₪ לפריט אחד.

אם המוצר נמכר לצרכנים במחיר 40 ₪ לפריט אחד אז כמות הפריטים שהמפעל מוכר ביום אחד הוא 100. כלכלני המפעל בדקו שעל כל הורדת שקל אחד במחיר לצרכן של פריט אחד, גדלה כמות הפריטים הנמכרים ביום אחד ב- 10.

סמנו ב- x את סכום ההורדה של המחיר לצרכן של מוצר אחד.

א. כתוב את הפונקציה המתארת את הרווח היומי של המפעל.

ב. מהו ערכו של x עבורו הרווח היומי של המפעל הוא הגדול ביותר?

ג. חשב את הרווח היומי הגדול ביותר.

חלק ג – דוגמאות לשאלות בחשבון דיפרנציאלי מבחינות הבגרות

דוגמה 1) שאלון 804, קיץ תשע"ה, מועד ב' שאלה 6 סעיפים א, ב)

(חקירת פולינום, גזירה של פונקציה מורכבת)

נתונה הפונקציה $f(x) = 8(2x-1)^3$ המוגדרת לכל x.

א. (1) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

דוגמה 2) שאלון 804, קיץ תשע"ד, שאלה 6)

(גזירה של פונקציה מורכבת, חקירת פונקציית שורש, הסקת מסקנות מהגרף)

נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. האם הישר $y = x - 2$ חותך את גרף הפונקצייה $f(x)$? נמק.

דוגמה 3) שאלון 804, קיץ תשע"ב, שאלה 8)

)גזירה של פונקציה מורכבת, חקירת פונקציית שורש, משוואת משיק, הסקת מסקנות מהגרף(

נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \sqrt{12-3x}$

$g(x) = -f(x)$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ד. במערכת צירים סרטט בקו מלא (—) סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

ה. סרטט בקו מרוסק (---) סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ו. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 1$,

והעבירו ישר אחר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 1$.

(1) מצא את השיעורים של נקודת המפגש בין המשיקים.

(2) מצא את שטח המשולש המוגבל על ידי המשיקים ועל ידי הישר $x = 1$.

דוגמה 4) שאלון 804, קיץ תשע"ב מועד ב, שאלה 7)

)חקירת פונקציה שהיא מכפלה של פולינום בשורש, הסקת מסקנות מהגרף(

נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2\sqrt{x+5}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. האם יש ערכים של x שעבורם $f(x) > 0$? נמק.

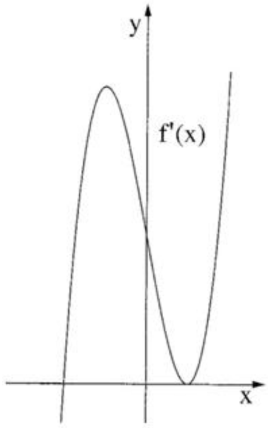
ד. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של גרף הפונקציה, וקבע את סוגן.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. כמה פתרונות יש למשוואה $-14 = -x^2\sqrt{x+5}$? נמק.

<u>דוגמה 5</u>) שאלון 804, קיץ תשע"ד שאלה 7)

)הקשר בין גרף הנגזרת לפונקציה, מציאת פונקציה על פי נקודה ושיפוע(



$f(x)$ היא פונקציה שמוגדרת לכל x .

בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עובר

דרך הנקודות: $(-2\ ,0)$, $(1\ ,0)$.

א. (1) על פי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$

מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

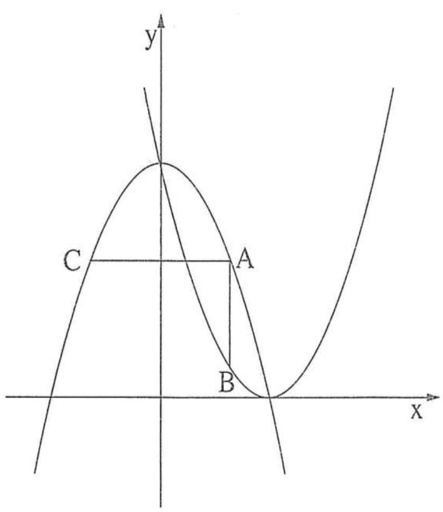
(2) מהו שיעור ה־ x של נקודת הקיצון

של הפונקציה $f(x)$, ומהו סוג הקיצון? נמק.

ב. מצא את השיעורים של הנקודות שבהן שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ הוא 0 .

<u>דוגמה 6</u>) שאלון 804, קיץ תשע"ד מועד ב, שאלה 8)

)בעיית קיצון גרפית המשלבת גיאומטרית המישור, וכוללת גזירת פולינום(



בציור שלפניך מוצגים הגרפים של הפונקציות

$f(x) = -x^2+9$ ו־ $g(x) = (x-3)^2$.

נקודה A נמצאת ברביע הראשון על

גרף הפונקציה $f(x)$.

מנקודה A העבירו שני ישרים:

ישר אחד, המקביל לציר ה־ y

וחותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B ,

וישר אחר, המקביל לציר ה־ x

וחותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה C

(ראה ציור).

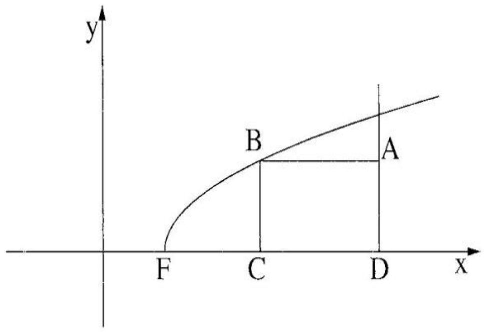
נסמן את שיעור ה־ x של הנקודה A ב־ t .

א. הבע באמצעות t את השיעורים של הנקודות A , B ו־ C .

ב. מצא את הערך של t שעבורו שטח המשולש ABC הוא מקסימלי.

<u>דוגמה 7</u>) שאלון 804, קיץ תשע"ה מועד ב, שאלה 8)

)בעיית קיצון גרפית המשלבת גיאומטרית המישור וכוללת גזירת מכפלה של פולינום בשורש(



הקדקוד B של המלבן $ABCD$ נמצא על

גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{2x-4}$.

הצלע AD מונחת על הישר $x = 10$

והצלע DC מונחת על ציר ה־ x

(ראה ציור).

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה B כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?

ב. גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה־ x בנקודה F (ראה ציור).
מצא את שטח המשולש BFC כאשר שטח המלבן $ABCD$ הוא מקסימלי.

סטטיסטיקה והסתברות – כיתה י' (לפחות 35 שעות)

מבוא

פרקי הסטטיסטיקה וההסתברות מהווים המשך של הנלמד בחטיבת הביניים.

בתכנית המפורטת בהמשך מוזכרים הנושאים שנלמדו בחטיבת הביניים ובהמשכם הנושאים החדשים הנלמדים בחטיבה העליונה.

פרק הסטטיסטיקה, בכיתה י', כולל סטטיסטיקה תיאורית: משתנה, ייצוג נתונים, ועיבוד הנתונים.

בפרק זה מומלץ להשתמש בכלים טכנולוגיים (כגון גיליון אלקטרוני) לייצוג נתונים ולעיבוד שלהם.

פרק ההסתברות כולל את הגדרת ההסתברות, אופן חישוב ההסתברות, כללי ההסתברות, הסתברות מותנית, ושימוש בעץ הסתברויות.

סטטיסטיקה תיאורית (לפחות 17 שעות)

מטרות על

- הכרות עם סוגים שונים של משתנים: משתנה איכותי (שמי), משתנה כמותי (בדיד או רציף).
- הכרות עם המושג התפלגות נתונים.
- בהקשר להצגת נתונים:
  1. הכרות עם הצגת נתונים באופנים שונים: הצגה באמצעות רשימה, באמצעות טבלת שכיחויות (מסוגים שונים), באמצעות ייצוגים גרפיים / ויזואליים שונים: דיאגרמת עמודות / מקלות למשתנה איכותי או למשתנה כמותי בדיד, היסטוגרמה למשתנה כמותי רציף, דיאגרמת עיגול, גרף (באותה מערכת צירים: גרף אחד או יותר).
  2. בחירה מושכלת של ההצגה המתאימה לייצוג הנתונים, ויכולת לנמק מדוע זו הבחירה המתאימה ביותר.
  3. פיתוח היכולת למעבר בין הייצוגים האפשריים של נתונים.
  4. השוואה באמצעות ייצוגים שונים, כגון: טבלאות שכיחות יחסית, דיאגרמת עמודות כפולה, מספר גרפים, מספר דיאגרמות עיגול.

בהקשר לעיבוד מידע:

1. הבנת הצורך בשימוש במדדי המרכז ובמדדי הפיזור.
2. הכרות עם אופנים שונים לעיבוד מידע, תוך שימוש במדדי מרכז ובמדדי פיזור.
3. הבנה של היתרונות והחסרונות של כל אחד ממדדי המרכז, ומכאן הבנה של הצורך בשלושת מדדי המרכז.
4. הבנה של היתרונות והחסרונות של כל אחד ממדדי הפיזור, ומכאן הבנה של הצורך בכל אחד מהם.

המשתנה (שעה אחת)

תכנים

- מושגי יסוד: אוכלוסייה, מדגם.
- משתנה: הגדרה של משתנה, ערכי המשתנה.
- סוגי המשתנים:
  * משתנה איכותי (כגון: צבע עיניים, מגדר, סוג דם, סוג העיסוק, אופן הגעה לבית הספר - למשל, באופניים, הסעה, רכב פרטי).
  * משתנה כמותי: משתנה כמותי בדיד (כגון: מספר הנפשות במשפחה) או משתנה כמותי רציף (כגון: טמפרטורה, שעה)

הצגת נתונים (לפחות 6 שעות)

תכנים

- הצגת נתונים באמצעות רשימה.

- הצגת נתונים באמצעות טבלת שכיחויות
  * קריאת המידע ובניית טבלת שכיחויות: טבלה של שכיחויות, טבלה של שכיחויות יחסיות (במספרים ו/או באחוזים), טבלה של שכיחויות מצטברות.

בטבלת השכיחויות, כל עמודה בטבלה יכולה לייצג ערך אחד של המשתנה או תחום ערכים של המשתנה כאשר הוא ערוך בקבוצות שוות רוחב (פרט לקצוות – ר' בהמשך).

כמו כן, יתכנו מקרים בהם בקבוצת ה"קצה" (באחת או בשתיהן) התחום יהיה תחום פתוח (ללא גבול עליון ו/או תחתון, כלומר: גדול ו/או קטן מערך מסוים).

  * מעבר מטבלת שכיחויות אחת לשנייה: מעבר בין הסוגים השונים של טבלאות השכיחויות,

ושימוש בכל סוג של טבלת שכיחויות בהתאם לצרכים – כולל הכרת היתרונות והחסרונות של כל אחד מסוגים אלו (למשל: טבלה של שכיחויות נותנת את כל המידע על הכמויות עצמן בצורה מפורטת, מעבר מטבלת שכיחויות מוחלטות לטבלה של שכיחויות יחסיות – גורמת לאיבוד של המידע על הכמויות עצמן אך מאפשרת השוואה של הטבלאות כאשר המדגמים אינם שווי גודל).

- הצגת הנתונים באמצעות <u>הייצוגים הגרפיים</u> הבאים:
  * <u>דיאגרמת עמודות – רגילה או כפולה</u>: קריאת מידע, בניית דיאגרמת עמודות על סמך נתונים המיוצגים באמצעות טבלת שכיחויות, קביעת המצבים שמתאים לייצגם באמצעות דיאגרמת עמודות, יתרונות וחסרונות של דיאגרמת עמודות.
  * <u>דיאגרמת עיגול</u>: קריאת מידע, בניית דיאגרמת עיגול על סמך נתונים המיוצגים באמצעות טבלת שכיחויות, קביעת המצבים שמתאים לייצגם באמצעות דיאגרמת עיגול, יתרונות וחסרונות של דיאגרמת עיגול.
  * <u>היסטוגרמה</u> (עבור משתנה כמותי רציף המאורגן בקבוצות): קריאת מידע, בניית היסטוגרמה (עבור קבוצות שוות רוחב) על סמך נתונים המיוצגים באמצעות טבלת שכיחויות, קביעת המצבים שמתאים לייצגם באמצעות היסטוגרמה, יתרונות וחסרונות של היסטוגרמה.
  * <u>גרף</u>: קריאת מידע, תכונות הגרף (עליה / ירידה / קבוע, נקודות מינימום / מקסימום, חיוביות / שליליות), וזיהוי מגמה. כל אלו עבור גרף אחד או יותר באותה מערכת צירים.

- מעבר מהצגה אחת לשנייה.

- קביעה של ההצגה המתאימה לייצוג הנתונים במצב נתון.

- <u>השוואה של אוספי נתונים</u>: השוואה בין אוספים של נתונים (שניים או יותר), כאשר הנתונים מיוצגים בייצוגים שונים: בטבלת שכיחויות מסוגים שונים ו/או בייצוגים גרפיים / ויזואליים שונים.

עיבוד הנתונים (לפחות 10 שעות)

תכנים

- <u>מדדי מרכז</u> – הבנת מהותם והצורך בהם (למשל, לצורך השוואה מיידית ופשוטה של שתי קבוצות); אופן חישובם עבור סוגי המשתנים השונים – חישובם על סמך ייצוגם ברשימה, בטבלת שכיחויות או בייצוגים הגרפיים השונים; הכרת תכונותיהם; קביעת המצבים בהם מתאים להשתמש בכל אחד מהם; יתרונותיהם וחסרונותיהם ומכאן הצורך במספר מדדים:

* <u>ממוצע</u> :
    - הבנת משמעות הממוצע;
    - חישוב הממוצע עבור משתנה כמותי בדיד או משתנה כמותי רציף – כאשר הנתונים מיוצגים ברשימה, בטבלת שכיחויות (הן כאשר כל עמודה מייצגת ערך אחד של המשתנה והן כאשר כל עמודה מייצגת תחום ערכים של המשתנה – משתנה הערוך בקבוצות שוות רוחב) או באמצעות אחד מהייצוגים הגרפיים / הוויזואליים (דיאגרמת עמודות או דיאגרמת עיגול);
    - תכונות הממוצע (מבוסס על כל הנתונים, ערכו אינו בהכרח אחד מהערכים הנתונים, קטן או שווה לערך הגדול ביותר וגדול או שווה לערך הקטן ביותר בסדרת הנתונים);
    - יתרונות הממוצע (פשוט לחישוב, יש לו אותן יחידות כמו למשתנה) וחסרונותיו / מגבלותיו (למשל, מושפע מערכים קיצוניים ולכן הוא לא בהכרח מייצג נאמנה את הנתונים, אין אפשרות לחשבו עבור משתנה איכותי, אין אפשרות לחשבו עבור משתנה הערוך בקבוצות שבו אחת מהקבוצות היא תחום פתוח);
    - השפעה של שינוי (חיבור / חיסור / כפל / חילוק) ערכי המשתנה על הממוצע.
* <u>ממוצע משוקלל</u>: הבנת משמעות הממוצע המשוקלל ; חישוב הממוצע המשוקלל.
* <u>שכיח:</u>
    - הבנת משמעות השכיח;
    - מציאת השכיח עבור כל סוגי המשתנים (כולל ניתוח מצבים בהם יש יותר משכיח אחד) כאשר הנתונים מיוצגים ברשימה, בטבלאות שכיחויות שונות (כולל מצבים בהם קבוצת הקצה היא תחום פתוח) או באמצעות אחד מהייצוגים הגרפיים / הוויזואליים (דיאגרמת עמודות או דיאגרמת עיגול) ;
    - יתרונות השכיח (השימוש בו הוא טבעי, קל למצוא אותו, מאפיין בצורה טובה עבור מצב בו יש נטייה ברורה של הנתונים, ניתן להשתמש בו גם עבור משתנה איכותי בנוסף למשתנה כמותי – המדד היחידי שמתאים למשתנה איכותי, אינו מושפע על ידי ערכים קיצוניים, יש לו אותן יחידות כמו למשתנה) וחסרונותיו / מגבלותיו (המינוח "מדד מרכז" עבורו הוא מסורתי אך מטעה, אין לו חשיבות אלא אם כן הוא מחושב עבור מספר גדול של נתונים וכאשר לנתונים יש נטייה ברורה, לפעמים הוא

חסר משמעות – כאשר אין שכיח או כאשר יש יותר משכיח אחד);

◦ השפעה של שינוי (חיבור / חיסור / כפל / חילוק) ערכי המשתנה על השכיח.

* <u>חציון</u>:

◦ הבנת משמעות החציון;

◦ חישוב החציון עבור משתנה כמותי בדיד או רציף - כאשר הנתונים מיוצגים ברשימה או בטבלת שכיחויות (רק במצב שבו כל עמודה בטבלה מייצגת ערך אחד של המשתנה או באמצעות אחד מהייצוגים הגרפיים / ויזואליים (דיאגרמת עמודות או דיאגרמת עיגול).

החישוב הוא הן עבור מספר זוגי של איברים והן עבור מספר אי-זוגי של איברים;

◦ הבנת המשמעות הגרפית של החציון בכל אחד מהייצוגים הגרפיים / ויזואליים (דיאגרמת עמודות או דיאגרמת עיגול).

◦ יתרונות החציון (מראה נטייה ברורה של סדרת הנתונים, אינו מושפע מערכים קיצוניים, חישובו פשוט כאשר הנתונים מיוצגים ברשימה מסודרת, יש לו אותן יחידות כמו למשתנה) וחסרונותיו / מגבלותיו (אין אפשרות לחשבו עבור משתנה איכותי, מושפע מסדר הנתונים ולא מערכי המשתנים פרט לנתונים במקומות האמצעיים).

◦ השפעה של שינוי (חיבור / חיסור / כפל / חילוק) ערכי המשתנה על החציון.

- <u>השוואה של אוספי נתונים</u>: שימוש במדדי המרכז לצורך השוואה של שני אוספי נתונים או יותר, המתייחסים לאותו המשתנה הנמדד ובאותן יחידות, כאשר הנתונים מיוצגים בטבלת שכיחויות (מסוגים שונים) ו/או באחד מייצוגים הגרפיים / הוויזואליים.

- במצב נתון, קביעה של מדד המרכז המתאים ביותר לייצוג של הנתונים.

- <u>עשירונים ורבעונים</u>: הבנת משמעותם וחשיבותם – כולל החשיבות של מקרים פרטיים (למשל, העשירון העליון); חישוב של כל אחד מהעשירונים / רבעונים עבור משתנה כמותי בדיד.

- <u>מדדי פיזור – עבור משתנה כמותי</u> :

* הבנת משמעות מדדי הפיזור.

* <u>טווח</u> :

◦ חישוב הטווח עבור משתנה כמותי בדיד או כמותי רציף – כאשר הנתונים מיוצגים ברשימה, בטבלת שכיחויות או באחד מהייצוגים הגרפיים / וויזואליים;

◦ יתרונות הטווח (מדד פשוט וקל לחישוב, מתאים למושג האינטואיטיבי שיש לנו

על פיזור) וחסרונותיו / מגבלותיו (אינו מהימן, כי הוא מבוסס רק על שני הערכים הקיצוניים, לא ניתן לשימוש עבור משתנה איכותי או כאשר אחד מערכי הקיצון הוא קבוצה פתוחה);

- השפעה של שינוי (חיבור / חיסור / כפל / חילוק) ערכי המשתנה על הטווח.

* <u>שונות וסטיית תקן</u> :

- חישוב השונות / סטיית התקן, עבור משתנה כמותי בדיד או משתנה כמותי רציף - הן כאשר כל עמודה מייצגת ערך אחד של המשתנה והן כאשר כל עמודה מייצגת תחום ערכים של המשתנה – משתנה הערוך בקבוצות שוות רוחב;
- יתרונות השונות / סטיית התקן (מבוססת על כל הנתונים, סטיית התקן היא באותן יחידות של המשתנה) וחסרונותיהם / מגבלותיהם (איברים שבקצוות תורמים תרומה גדולה יותר ממשקלם האמיתי, היחידות של השונות הן ריבועי היחידות של איברי הסדרה).
- השפעה של שינוי (חיבור / חיסור / כפל / חילוק) ערכי המשתנה על השונות / סטיית התקן.

- במצב נתון, קביעה של מדד הפיזור המתאים ביותר לייצוג של הנתונים.

- <u>השוואה של אוספי נתונים</u>: שימוש במדדי הפיזור לצורך השוואה של שתי קבוצות או יותר, המתייחסים לאותו המשתנה הנמדד ובאותן יחידות, כאשר הנתונים מיוצגים בטבלת שכיחויות (מסוגים שונים) ו/או בייצוגים גרפיים / וויזואליים שונים.

הסתברות (לפחות 18 שעות)

תורת ההסתברות נועדה לטפל במצבים של אי-וודאות.

הנושאים הנלמדים בהסתברות משמשים גם ככלי לסטטיסטיקה.

מטרות על

1. הכרות עם תופעות של אי-וודאות.
2. הבנה של משמעות ההסתברות כהערכה של סיכוי להתרחשות של מאורע.
3. הכרות עם אופן חישוב הסתברויות.
4. הכרות עם ייצוגים ויזואליים של הנתונים / ההסתברויות : טבלה, עץ הסתברויות.

תכנים

מרחב המדגם : הגדרה.

מאורע : הגדרה, סימון, מאורע וודאי, מאורע בלתי אפשרי, מאורעות זרים, מאורעות משלימים.
פעולות : איחוד מאורעות, חיתוך מאורעות – שימוש גם בדיאגרמת ון.
הערה : יש ללמד מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות לצורך הוראת הנושא.

הסתברות : הגדרת ההסתברות, אופן חישוב ההסתברות כשכיחות יחסית או כיחס שטחים.

חוקי / כללי ההסתברות :

- ההסתברות של מאורע A היא בין 0 ל- 1 : $0 \le P(A) \le 1$
- ההסתברות של מאורע וודאי היא 1 : $P(U) = 1$, כאשר U מרחב המדגם
- ההסתברות של מאורע בלתי אפשרי היא 0 : $P(\emptyset) = 0$
- אם $A \subseteq B$, אז $P(A) \le P(B)$
- הסתברות של מאורע משלים למאורע A: $P(\overline{A})=1-P(A)$
- הסתברות של איחוד מאורעות:
  - * לכל שני מאורעות A ו- B מתקיים: $(P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B$
  - * עבור A ו- B מאורעות זרים: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  - * עבור $A_1, A_2, \dots. A_n$ מאורעות זרים:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

הסתברות מותנית :

- משמעות ההסתברות המותנית.

- הגדרה: $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

- ההבדל בין $P(A/B)$ לבין $P(B/A)$

- נוסחת ההסתברות השלמה עבור שני מאורעות: $P(A)=P(A/B)\cdot P(B)+P(A/\overline{B})\cdot P(\overline{B})$

(ממוצע משוקלל של ההסתברויות המותנות החלקיות).

<u>נוסחת בייס (Bayes)</u> $P(A/B)\cdot P(B)=P(B/A)\cdot P(A)$

<u>ייצוג באמצעות טבלה</u>: טבלה דו-ממדית (2×2 או 2×3).

	A	$\underline{A}$
B		
$\underline{B}$		

<u>ניסוי רב שלבי - ייצוג באמצעות עץ הסתברויות</u>:

- אופן בניית עץ ההסתברויות והמשמעות של כל מסלול בעץ.
- חישוב הסתברויות של מאורעות באמצעות העץ – תוך הסבר החישוב באמצעות ההסתברות המותנית.
- ייצוג מאורעות רב-שלביים (דו-שלביים או תלת- שלביים).

<u>מאורעות תלויים או בלתי תלויים</u>: שלושה אופנים לקביעה אם שני מאורעות הם בלתי תלויים – כולל הסברים מילוליים על המשמעות:

A ו- B הם מאורעות בלתי תלויים אם ורק אם: $P(A/B)=P(A)$

A ו- B הם מאורעות בלתי תלויים אם ורק אם: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

A ו- B הם מאורעות בלתי תלויים אם ורק אם: $P(A/B)=P(A/\overline{B})$

הוכחה ששלושתם שקולים.

<u>הערה</u>: בהוראה יש לשלב תכנים של הסתברות וסטטיסטיקה

נספחים

נספח א' – דוגמאות לפרק סטטיסטיקה

<u>דוגמה</u>) דוגמה לשאלה שעוסקת במשתנה כמותי רציף, ייצוג בטבלת שכיחויות, ייצוג גרפי בדיאגרמת עמודות בדיאגרמת עיגול ובהיסטוגרמה, מדדי מרכז, מדדי פיזור(

לפניכם גבהים של תלמידי הכיתה:

148, 153, 155, 158, 162, 163, 163, 167, 169, 174, 177, 178, 185, 188

1. מהו המשתנה? מהו סוג המשתנה?
2. רשמו את הנתונים בסדר עולה.
3. ייצגו את הנתונים באמצעות:

   1) טבלת שכיחויות (רגילה)

   2) טבלת שכיחויות יחסיות

   3) טבלת שכיחויות מצטברת
4. האם מתאים לייצג את הנתונים הללו בדיאגרמת עמודות?

אם כן, שרטטו דיאגרמת עמודות, וקבעו מה ניתן לראות בצורה בולטת בדיאגרמת העמודות?

אם לא, הסבירו מדוע לא.

5. האם מתאים לייצג את הנתונים הללו בדיאגרמת עיגול?

   אם כן, שרטטו דיאגרמת עיגול, וקבעו מה ניתן לראות בצורה בולטת בדיאגרמת העיגול?

   אם לא, הסבירו מדוע לא.
6. האם מתאים לייצג את הנתונים הללו בגרף?

   אם כן, שרטטו גרף, וקבעו מה ניתן לראות בצורה בולטת בגרף?

   אם לא, הסבירו מדוע לא.
7. בכיתה זו חשבו את שלושת מדדי המרכז:

   1) את הגובה הממוצע.   2) את הגובה השכיח. 3) את החציון של הגובה.
8. בכיתה זו, חשבו את שני מדדי הפיזור: 1) טווח הגבהים.   2) סטיית התקן.

9. בטבלת השכיחויות הבאה, קבעו את השכיחות של כל קבוצה:

1.80 – 1.89	1.70 – 1.79	1.60 – 1.69	1.59 – 1.50	1.40 – 1.49

10. עבור הנתונים, המיוצגים בקבוצות בהתאם לסעיף הקודם, חשבו את שני מדדי המרכז:

   1) ממוצע   2) שכיח.

11. האם יש הבדל בין הממוצע שקיבלתם בסעיף ו' לבין הממוצע שקיבלתם בסעיף ח'? הסבירו.
12. האם יש הבדל בין השכיח שקיבלתם בסעיף ו' לבין השכיח שקיבלתם בסעיף ח'? הסבירו.
13. ייצגו את טבלת השכיחויות בסעיף ח' באמצעות היסטוגרמה.

<u>דוגמה</u>) משתנה כמותי בדיד, השוואה בין קבוצות, מדדי מרכז, מדד פיזור(

לפניכם הציונים באנגלית של שלושה תלמידים לאורך השנה:

הציונים של רמי:60, 65, 70, 62, 87, 77

הציונים של תמר: 10, 85, 92, 87, 100, 93

הציונים של נעמה: 57, 65, 88, 90, 70, 75

1. מהו המשתנה? מה סוג המשתנה?
2. הסבירו במילים מה מייצג כל אחד ממדדי המרכז: ממוצע, חציון ושכיח.
3. חשבו את מדדי המרכז: ממוצע, חציון ושכיח של הציונים עבור כל אחד מהתלמידים.
4. עבור כל תלמיד, איזה מדד מרכז מייצג טוב ביותר את הציונים שלו?
5. לצורך השוואה בין הציונים של התלמידים, איזה ממדדי המרכז טוב יותר להשוואה זו?
6. למי מהתלמידים טווח הציונים שלו הוא הגדול ביותר? הסבירו.
7. למי מהתלמידים סטיית תקן שלו היא הגדולה ביותר? הסבירו.

<u>דוגמה</u>) משתנה כמותי בדיד, טבלת שכיחויות, מדדי מרכז, מדד פיזור)

לפניכם התפלגות מספר הפסילות של קופצים לגובה בתחרות:

מספר הפסילות	0	1	2	3	4
שכיחות	4	16	9	6	5

1. מה המשתנה? מה סוג המשתנה?
2. (1) חשבו את מדדי המרכז: ממוצע, חציון, שכיח.
   (2) הסבירו במילים את המשמעות של כל אחד ממדדי המרכז.
   (3) איזה מדד מרכז מייצג טוב ביותר את הנתונים הללו? הסבירו.
3. חשבו את העשירון התחתון ואת העשירון העליון של מספר הפסילות.
4. חשבו את מדדי הפיזור של מספר הפסילות:
   (1) הטווח של מספר הפסילות.

(2) סטיית התקן של מספר הפסילות.

(3) ציינו במילים את המשמעות של כל אחד ממדדי הפיזור.

(4) איזה מדד מייצג טוב ביותר את הפיזור של הנתונים? הסבירו.

5. לקבוצת המתחרים התווספו עוד שלושה קופצים, שמספר הפסילות שלהם: 3 , 1 , 1

(1) אילו מדדי מרכז יושפעו משינוי זה? הסבירו. חשבו מחדש מדדים אלו.

(2) האם העשירון התחתון ו/או העשירון העליון ישתנה? הסבירו.

(3) אילו מדדי פיזור יושפעו משינוי זה? הסבירו. חשבו מחדש מדדים אלו.

<u>דוגמה</u> (הבנת המשמעות של מדדי המרכז)

רשמו נכון / לא נכון.

עבור תשובה "נכון", הסבירו מדוע. עבור תשובה "לא נכון" תנו דוגמה נגדית.

1. הממוצע חייב להיות אחד מהערכים.
2. הממוצע נמצא בין הערך הקטן ביותר (כולל) לבין הערך הגדול ביותר (כולל).
3. החציון יכול להיות שווה לממוצע.
4. הוספה של ערך השווה ל- 0 לערכים נתונים לא משנה את הממוצע.

<u>דוגמה</u> (הבנת המשמעות של מדדי המרכז, שאלה הפוכה: בניית נתונים על פי המדד המרכזי הנתון)

עבור כל סעיף בנפרד, תנו דוגמה לחמישה ערכים המקיימים את התנאים המצוינים בסעיף זה:

1. הממוצע שלהם 72.
2. החציון שלהם 103.
3. החציון גדול מהממוצע.
4. החציון שווה לממוצע

<u>דוגמה</u> (הבנת המשמעות של מדדי המרכז, בניית נתונים על פי שלושת מדדי המרכז)

לארבעה נערים, העובדים באותו מקום עבודה, חושבו המדדים הבאים, עבור יום עבודה אחד:

השכר הממוצע: 250 ₪

השכר השכיח: 300 ₪

השכר החציוני: 265 ₪

מה השכר של כל אחד מארבעת הנערים ביום עבודה אחד?

דוגמה) הבנת מהות מדדי המרכז: ממוצע, שכיח וחציון(

1. בבחינה באזרחות, שהתקיימה בכיתה מסוימת, התקבלו רק הציונים: 9 ,8 ,7.
ידוע כי ממוצע הציונים באזרחות בכיתה זו היה 8.
(1) מה ניתן לומר על הקשר בין שכיחות הציון 7 לבין שכיחות הציון 9? הסבירו.
(2) האם ניתן לחשב את הציון השכיח בכיתה זו?
אם כן, חשבו אותו. אם לא, הסבירו מדוע לא ניתן לחשבו.
(3) האם ניתן לחשב את הציון החציוני בכיתה זו?
אם כן, חשבו אותו. אם לא, הסבירו מדוע לא ניתן לחשבו.

2. בבחינה בספרות, שהתקיימה באותה הכיתה, התקבלו רק הציונים: .9 ,8 ,6
ידוע כי ממוצע הציונים בספרות בכיתה זו היה 8.
(1) מה ניתן לומר על הקשר בין שכיחות הציון 6 לבין שכיחות הציון 9? הסבירו.
(2) האם ניתן לחשב את הציון השכיח בכיתה זו?
אם כן, חשבו אותו. אם לא, הסבירו מדוע לא ניתן לחשבו.
(3) האם ניתן לחשב את הציון החציוני בכיתה זו?
אם כן, חשבו אותו. אם לא, הסבירו מדוע לא ניתן לחשבו.
(4) שלושה תלמידים נוספים, שלא היו במועד הבחינה, נבחנו במועד מיוחד. ידוע שהם קיבלו ציון של 6 או 9, ושהממוצע הכיתתי לא השתנה גם לאחר הוספת הציונים של שלושת התלמידים הללו. אחד התלמידים קיבל ציון של 9.
איזה ציון קיבלו שני התלמידים האחרים? הסבירו.

דוגמה) משתנה כמותי בדיד, השפעת שינוי הנתונים על מדדי המרכז ועל מדדי הפיזור, חישוב נתון על פי הממוצע – שאלה "הפוכה")

ממוצע השכר לשעה של שישה עובדים זמניים בחברה הוא 50 ₪.

לפניכם השכר לשעה של חמישה מעובדים אלה: 45 ₪ , 52 ₪, 53 ₪ , 48 ₪ , 50 ₪

1. מה המשתנה? מה סוג המשתנה?
2. חשבו את השכר לשעה של העובד הזמני השישי.
3. חשבו את השכיח ואת החציון של השכר הממוצע לשעה של ששת העובדים הזמניים.
4. חשבו את טווח השכר לשעה של ששת העובדים הזמניים.
5. חשבו את סטיית התקן של השכר לשעה עבור ששת העובדים הזמניים.
6. בחודש פברואר התווספו שני עובדים זמניים חדשים, ששכרם לשעה הוא 60 ₪ ו- 56 ₪.
   (1) קבעו ללא חישוב אילו ממדדי המרכז ישתנו? הסבירו. בדקו את קביעתכם באמצעות חישוב.
   (2) קבעו ללא חישוב אילו ממדדי הפיזור ישתנו? הסבירו. בדקו את קביעתכם באמצעות חישוב.
7. בחודש אפריל הוחלט להעלות ב- 4 ₪ את השכר לשעה של כל אחד משמונה העובדים הזמניים.
   (1) כיצד ישפיע שינוי זה על מדדי המרכז: ממוצע, חציון, שכיח?
   (2) הסבירו כיצד ניתן לקבוע מידית את ערכם של מדדי המרכז החדשים.
   (3) האם שינוי זה ישפיע גם על מדדי הפיזור? הסבירו.
8. בחודש אוגוסט הוחלט להעלות שוב את השכר לשעה של כל אחד משמונה העובדים הזמניים, הפעם ב- 10% משכרם הקודם.
   (1) כיצד ישפיע שינוי זה על מדדי המרכז: ממוצע, חציון, שכיח?
   (2) הסבירו כיצד ניתן לקבוע מידית את ערכם של מדדי המרכז החדשים.
   (3) האם שינוי זה ישפיע גם על מדדי הפיזור? הסבירו.

דוגמה) הבנת המהות של מדדי הפיזור: טווח וסטיית התקן)

רשמו נכון / לא נכון.

עבור תשובה "נכון", הסבירו מדוע. עבור תשובה "לא נכון" תנו דוגמה נגדית.

1. אם סכום ריבועי הסטיות מהממוצע שווה לאפס, אז סטיית התקן שווה לאפס.
2. אם בקבוצת אנשים אחת סטיית התקן גדולה יותר מסטיית התקן בקבוצת אנשים שנייה, אז מספר האנשים בקבוצה האחת גדול יותר ממספר האנשים בקבוצה השנייה.

3. בקבוצת נתונים, כאשר כל הנתונים שווים זה לזה, אז סטיית התקן היא אפס.
4. כאשר סטיית התקן היא אפס, אז כל הנתונים שווים זה לזה.
5. כאשר הטווח הוא אפס, אז כל הנתונים שווים זה לזה.

דוגמה) הבנת מהות ההתפלגות ומהות הממוצע וסטיית התקן(

בקבוצה של תלמידים התקבל ציון ממוצע בספורט של 75 וסטיית תקן 0.

1. האם ניתן לדעת מה היו הציונים בספורט של כל התלמידים? הסבירו.
2. האם ניתן לקבוע מהו הציון השכיח? הסבירו.
3. האם ניתן לדעת מהו הציון החציוני? הסבירו.
4. מוסיפים לקבוצה המקורית תלמיד אחד שהציון שלו בספורט הוא 80.

   האם הממוצע בספורט יגדל / לא ישתנה / יקטן בהשוואה לממוצע הנתון? הסבירו.

   האם סטיית התקן תגדל / לא תשנה / תקטן בהשוואה לסטיית התקן נתונה? הסבירו.
5. מוסיפים לקבוצה המקורית שני תלמידים שהציון של שניהם הוא 80.

   האם הממוצע בספורט יגדל / לא ישתנה / יקטן בהשוואה למה שמצאתם בסעיף ד'? הסבירו.

   האם סטיית התקן תגדל / לא תשנה / תקטן בהשוואה למה שמצאתם בסעיף ד'? הסבירו.
6. מוסיפים לקבוצה המקורית שני תלמידים שהציונים שלהם בספורט: 85 ו- 65.

   האם הממוצע בספורט יגדל / לא ישתנה / יקטן בהשוואה לממוצע הנתון? הסבירו.

   האם סטיית התקן תגדל / לא תשנה / תקטן בהשוואה לסטיית התקן הנתונה? הסבירו.
7. האם ניתן להוסיף תלמידים לקבוצה המקורית כך שסטיית התקן תקטן בהשוואה לנתון?

דוגמא) קריאת מידע מייצוגים גרפיים: עיגול, דיאגרמת עמודות)

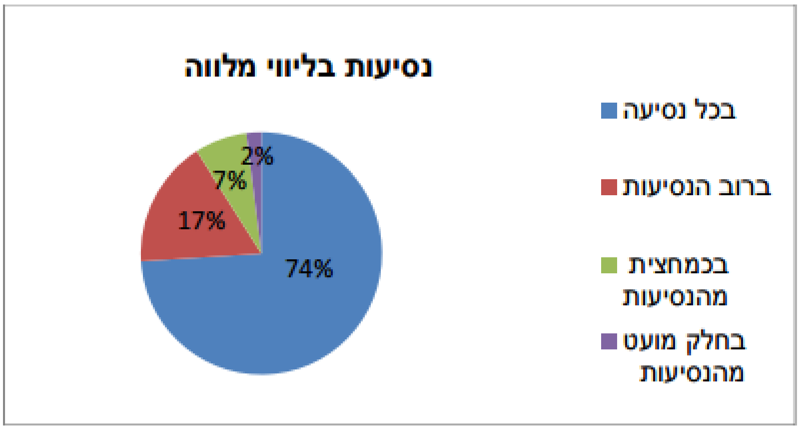
(המידע לקוח מכתבה, בדצמבר 2014, של הרשות הלאומית לבטיחות בדרכים, הנמצאת באתר זה)

ניתן לקרוא את הכתבה המלאה גם באמצעות סריקה של הבר-קוד הבא:

בישראל, כמו במדינות נוספות בעולם, מיושם רישיון נהיגה מדורג לנהגים צעירים. במסגרת החוק והתקנות, שנכנסו לתוקף ב- 1.7.2013, כל נהג חדש צעיר (עד גיל 24), חייב לנהוג עם מלווה בכל נסיעה במשך שלושת החודשים הראשונים, ובשלושת החודשים שלאחר מכן עם מלווה בכל נסיעה בלילה (ולהשלים 35 שעות לפחות של נהיגה ביום ו- 15 שעות נהיגת לילה). על ההורים להגיש הצהרה למשרד הרישוי על ביצוע שעות הליווי כתנאי לקבלת רישיון נהיגה.

1. להלן הנתונים שהתקבלו בסקר שביצעה הרשות הלאומית לבטיחות בדרכים בנוגע לביצוע החוק. בקרב הורים:

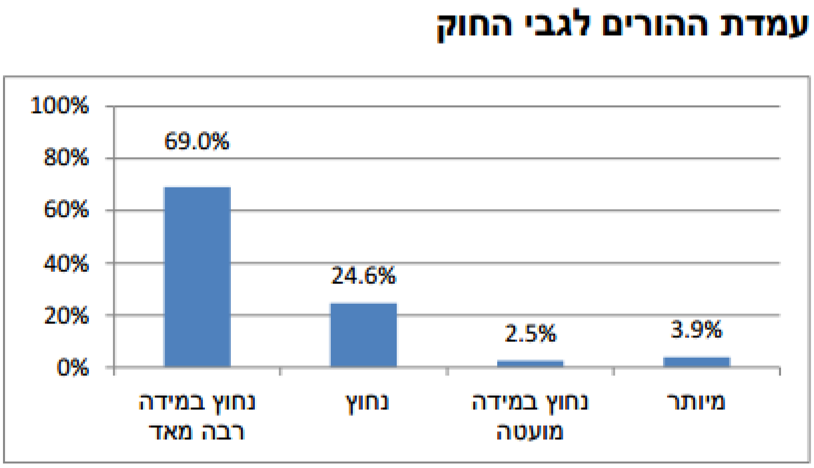
ביצוע החוק



1. מה המשתנה? מה סוג המשתנה?
2. מה מייצג העיגול השלם?
3. מהו השכיח?
4. איזה אחוז מההורים אינם מלווים את הילד שלהם בכל נסיעה?

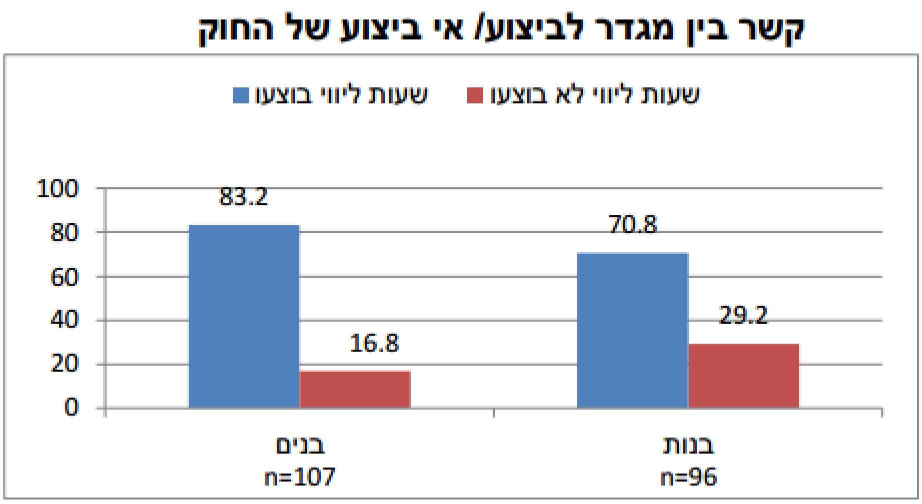
5. פי כמה גדול מספר ההורים המלווים את הילד שלהם בכל נסיעה, ממספר ההורים המלווים את הילד שלהם ברוב הנסיעות?
6. פי כמה גדול אחוז ההורים המלווים את הילד שלהם ברוב הנסיעות, ממספר ההורים המלווים את הילד שלהם בחלק מועט מהנסיעות?
7. האם ניתן היה לייצג נתונים אלו בדיאגרמת עמודות? הסבירו.

2. בסקר זה נבדקה גם עמדת ההורים לגבי החוק. להלן התוצאות:



1. מה המשתנה? מה סוג המשתנה?
2. מה ניתן לראות בדיאגרמת עמודות זו?
3. איזה אחוז מההורים חושבים שהחוק נחוץ או נחוץ במידה רבה מאוד?
4. האם מתאים לייצג נתונים אלו בדיאגרמת עמודות? הסבירו.
5. האם ניתן לייצג נתונים אלו גם באמצעות דיאגרמת עיגול? הסבירו.

3. בסקר זה נערכה גם השוואה בין ליווי / אי-ליווי של בנים לבין ליווי / אי-ליווי של בנות. להלו התוצאות (הנתונים הם באחוזים):



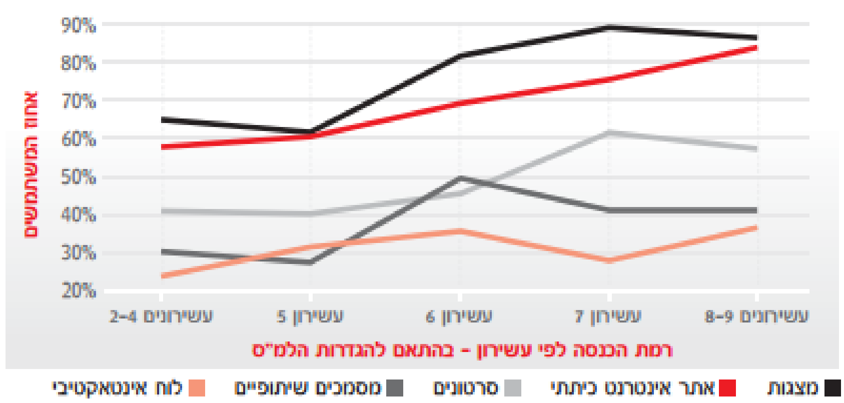
1. מה המשתנה? מה סוג המשתנה?
2. רשמו כל מה שניתן להסיק מדיאגרמת העמודות הכפולה הזו.
3. האם נכון היה לייצג נתונים אלו בדיאגרמת עמודות כפולה? הסבירו.
4. האם ניתן היה לייצג נתונים אלו בדיאגרמת עיגול? הסבירו.

4. אילו ממדדי המרכז ואילו ממדדי הפיזור ניתן לחשב, בכל אחד מסעיפים 1-3? הסבירו. חשבו מדדים אלו.

<u>דוגמא</u>) ייצוג מידע בגרף, השוואת גרפים)

לפניכם מידע הלקוח מתוך מחקר בשם "ללמוד עם טכנולוגיה – סקר בקרב בני נוער בישראל על למידה והוראה בשילוב טכנולוגיה", דצמבר 2012. המידע לקוח [מאתר זה](), ונכתב ע"י ד"ר יובל דרור וסער גרשון.

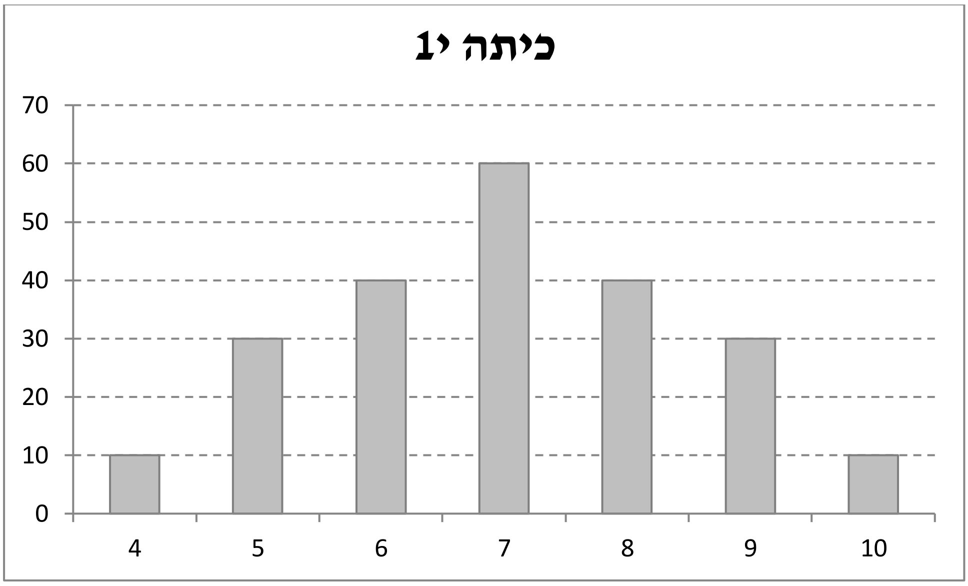
גרף 2: שיעור המשתמשים בכל אמצעי עזר לפי רמת הכנסה



1. כתבו מספר שאלות בנוגע להשוואה של הנתונים המוצגים בגרפים.
2. ענו על שאלות אלו.

<u>דוגמא</u>) קריאת מידע מייצוגים גרפי של דיאגרמת עמודות, השוואת קבוצות, מדדי מרכז ומדדי פיזור(

לפניכם שתי דיאגרמות עמודות, המייצגות את התפלגות הציונים בשתי כיתות י'



1. מהו המשתנה? מה סוג המשתנה?
2. תארו במילים את ההבדלים בין שתי הכיתות.
3. בכל אחת מן הכיתות, קבעו מהו הממוצע, השכיח והחציון.
   הציעו שתי דרכים לקביעת מדדי מרכז אלו.
4. בכל אחת מן הכיתות, חשבו את מדדי הפיזור: הטווח וסטיית התקן.
5. השוו את שתי הכיתות תוך התייחסות למדדי המרכז ולמדדי הפיזור שקיבלתם.

נספח ב' – דוגמאות לפרק הסתברות

<u>דוגמה</u>) ייצוג באמצעות טבלה, חיתוך מאורעות, הסתברות מותנית(

בשכונה מסוימת נשאלו כל התושבים האם הם מעוניינים בבניית אולם קולנוע במרכז המסחרי.

לפניכם התפלגות התשובות:

	מעוניינים בבניית אולם קולנוע	לא מעוניינים בבניית אולם קולנוע
צעירים	75	85
מבוגרים	140	50

בוחרים באקראי תושב מהשכונה.

1. מה ההסתברות שהוא צעיר?
2. מה ההסתברות שהוא מעוניין בבניית אולם קולנוע?
3. מה ההסתברות שהוא צעיר המעוניין בבניית אולם קולנוע?

4. פגשת צעיר מהשכונה. מה ההסתברות שהוא מעוניין בבניית אולם קולנוע?
5. ועד השכונה החליט לערוך מפגש לכל התושבים שאינם מעוניינים בבניית אולם קולנוע. בהנחה שלמפגש הגיעו רק תושבים אלו, וכן שהגיעו כולם - מה ההסתברות לפגוש צעיר במפגש זה?

<u>דוגמה</u>) הסתברות מותנית, מאורעות תלויים/בלתי תלויים, נוסחת ההסתברות השלמה, חיתוך מאורעות, נוסחת בייס(

בבית ספר מסוים 20% מהבנים פעילים בתנועת נוער, ו- 30% מהבנות פעילות בתנועת נוער.

$\frac{2}{5}$ מתלמידי בית הספר הם בנים.

1. מהו מרחב המדגם?
2. האם המאורעות "פעיל בתנועת נוער" ו"בת" הם מאורעות תלויים או בלתי תלויים?
3. בוחרים באקראי תלמיד (בן או בת) בבית הספר. מה ההסתברות שהוא פעיל בתנועת נוער?
4. בוחרים באקראי תלמיד (בן או בת) בבית הספר. מה ההסתברות שהוא בן שפעיל בתנועת נוער?

5. לכנס תנועות נוער בחרו תלמיד מתוך אלו הפעילים בתנועת נוער. מה ההסתברות שנבחרה בת?

<u>דוגמה</u> (שאלון 804, קיץ תשע"ה שאלה 3)

(ניסוי רב שלבי, ייצוג באמצעות עץ הסתברויות, הסתברות מותנית, מאורעות תלויים/בלתי תלויים, איחוד מאורעות)

בקופסה I יש 3 כדורים אדומים ו- 4 כדורים ירוקים.

בקופסה II יש 12 כדורים אדומים ו- 4 כדורים ירוקים.

בוחרים באקראי קופסה, ומוציאים ממנה 2 כדורים זה אחר זה (בלי החזרה).

1. מהי ההסתברות ש- 2 הכדורים יהיו באותו צבע?
2. מהי ההסתברות ש- 2 הכדורים יהיו בצבעים שונים?
3. ידוע כי 2 הכדורים היו באותו צבע.
   מה ההסתברות שהם הוצאו מקופסה I?

<u>דוגמה</u> (שאלון 804, חורף תשע"ה שאלה 3) (מאורעות תלויים/בלתי תלויים, הסתברות מותנית, איחוד מאורעות)

בשקית א' יש 7 מטפחות צהובות ו- 5 מטפחות אדומות.

בשקית ב' יש 10 מטפחות: חלקן צהובות והשאר אדומות.

הוציאו באקראי מטפחת אחת משקית א' ומטפחת אחת משקית ב'.

ההסתברות ששתי המטפחות צהובות היא $\frac{7}{40}$.

1. כמה מטפחות צהובות היו בשקית ב'?
2. מחזירים כל מטפחת לשקית שממנה הוציאו אותה, ומוציאים באקראי מטפחת משקית א' ומטפחת משקית ב'.
   ידוע כי המטפחות שהוצאו הן בצבעים שונים.
   מהי ההסתברות שהמטפחת שהוצאה משקית ב' היא צהובה?
3. מחזירים שוב כל מטפחת לשקית שממנה הוציאו אותה.
   בוחרים באקראי שקית, ומוציאים ממנה באקראי בלי החזרה שתי מטפחות.
   מהי ההסתברות ששתי המטפחות הן אדומות?

דוגמה (שאלון 804, חורף תשע"ג שאלה 3)

(ניסוי רב שלבי, ייצוג באמצעות עץ הסתברויות, הסתברות מותנית, מאורעות תלויים / בלתי תלויים)

בשלוש קופסאות A, B ו- C יש כדורים שחורים ולבנים.

בקופסה A יש 2 כדורים שחורים ו- 3 כדורים לבנים.

בקופסה B יש 3 כדורים שחורים ו- 2 כדורים לבנים.

בקופסה C יש 4 כדורים שחורים ו- 1 כדור לבן.

1. בוחרים באקראי קופסה, ומוציאים ממנה באקראי כדור אחד.
   (1) מהי ההסתברות להוציא כדור לבן?
   (2) ידוע שהוצא כדור לבן.
   מהי ההסתברות שהכדור הוצא מקופסה B?
2. מקופסה C מוציאים באקראי 2 כדורים זה אחר זה בלי החזרה.
   מהי ההסתברות שאחרי הוצאת הכדורים לא נותר בקופסה C כדור לבן?

דוגמה (שאלון 804, קיץ תשע"א מועד ב שאלה 3) (מאורעות תלויים/בלתי תלויים)

1. מטילים פעם אחת קוביית משחק מאוזנת.
   (1) מהי ההסתברות שיתקבל מספר זוגי גדול מ- 3?
   (2) האם המאורע "יתקבל מספר זוגי" והמאורע "יתקבל מספר גדול מ- 3"
   הם מאורעות בלתי תלויים? נמק.

מטילים קוביית משחק מאוזנת 3 פעמים.

2. מהי ההסתברות שיתקבל מספר זוגי גדול מ- 3 בדיוק בשתי הטלות?
3. מהי ההסתברות שיתקבל מספר זוגי גדול מ- 3 רק בהטלה הראשונה ובהטלה השלישית?
4. מהי ההסתברות שיתקבל מספר זוגי גדול מ- 3 בהטלה הראשונה ובהטלה השלישית?

דוגמה (שאלון 804, קיץ תש"ע מועד ב שאלה 3)

(מאורע רב שלבי, ייצוג באמצעות עץ הסתברויות, הסתברות מותנית, חיתוך מאורעות)

יוסי משחק שלושה משחקי שש-בש, בזה אחר זה.

בכל משחק הוא יכול לנצח או להפסיד (אין תיקו).

אם יוסי ניצח באחד המשחקים, ההסתברות שהוא ינצח במשחק שאחריו היא P,

ואם הוא הפסיד באחד המשחקים, ההסתברות שהוא יפסיד במשחק שאחריו גם היא P.

נתון כי $P > 0.5$.

1. אם ידוע כי יוסי ניצח במשחק הראשון:

   (1) הבע באמצעות P את ההסתברות שיוסי יפסיד במשחק השני וינצח במשחק השלישי.

   (2) חשב את P אם נתון גם כי ההסתברות שיוסי ינצח במשחק השלישי היא $\frac{13}{25}$.

2. השתמש בערך של P שחישבת, וחשב את ההסתברות שיוסי ינצח במשחק הראשון,
   אם נתון כי ההסתברות שיוסי ינצח בשלושת המשחקים היא 0.144.

דוגמה (שאלון 804, קיץ תש"ע שאלה 3)

(מאורע רב שלבי, מאורעות תלויים/בלתי תלויים, הסתברות מותנית)

במכללה מסוימת הסטודנטים למחשבים נבחנים בסוף השנה במבחן בהסתברות וסטטיסטיקה.

במבחן יש שני תרגילים בהסתברות ותרגיל אחד בסטטיסטיקה.

נבחן מקבל ציון עובר או ציון נכשל בכל תרגיל במבחן.

כדי לקבל ציון עובר במבחן כולו על הנבחן לקבל ציון עובר בשני תרגילים לפחות מבין השלושה.

הסיכוי שסטודנט יקבל ציון עובר בתרגיל בהסתברות הוא 60%,

והסיכוי שסטודנט יקבל ציון עובר בסטטיסטיקה הוא 80%.

ההסתברויות לקבל ציון עובר או נכשל בתרגילים השונים אינן תלויות זו בזו.

1. (1) מהי ההסתברות שנבחן יקבל ציון עובר בשלושת התרגילים במבחן?

   (2) מהי ההסתברות שנבחן יקבל ציון עובר בשני תרגילים במבחן וציון נכשל בתרגיל אחד?

   (3) מהי ההסתברות שנבחן יקבל ציון עובר במבחן כולו?

2. נבחן קיבל ציון עובר במבחן כולו.
   מהי ההסתברות שהוא קיבל ציון עובר בשני התרגילים בהסתברות?