תוכנית הלימודים ברמה של 4 יח"ל

כיתה י"א

פונקציות וחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי –
כיתה י"א (לפחות 45 שעות)

מבוא

בנושא פונקציות וחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי יש שני פרקים:

- פרק קדם אנליזה של פונקציה רציונלית בעזרת התנהגות פונקציות מהצורה

  $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ ללא שימוש בכלים של החשבון הדיפרנציאלי,
  כאשר $f(x)$ הוא פולינום ממעלה שנייה לכל היותר.
  מומלץ לשלב אמצעים טכנולוגיים בלימוד פרק זה.

- פרק חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי
  פרק זה מחולק לשלושה חלקים:
  * חשבון דיפרנציאלי של פונקציה רציונלית ופונקציית שורש ריבועי –
  פונקציית השורש הריבועי כהמשך למה שנלמד בכיתה י'.
  * שאלות ערך קיצון
  * חשבון אינטגרלי – מציאת פונקציה קדומה וחישוב שטחים בין גרפים של פונקציות.

קדם אנליזה (לפחות 4 שעות)

תכנים

נדון בפונקציה מהצורה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$, כאשר $f(x)$ הוא פולינום ממעלה שנייה לכל היותר.

- קביעת תכונות של הפונקציה $g(x)$ על סמך התכונות של הפונקציה $f(x)$.
- התייחסות לתכונות הבאות של $g(x)$: תחום הגדרה, היעדר נקודות החיתוך עם ציר X, תחומי חיוביות ושליליות, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון.
- הכרת המושג אסימפטוטות מאונכות לצירים.

(התנהגות בסביבת נקודת אי ההגדרה ועבור $x\to\pm\infty$ באופן אינטואיטיבי בלבד.)

- סרטוט גרף הפונקציה $g(x)$ כאשר הפונקציה $f(x)$ נתונה בצורה אלגברית או בצורה גרפית.
- טרנספורמציות של הפונקציה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$: הזזה אנכית, הזזה אופקית, שיקוף ביחס לצירים, מתיחה / כיווץ, ערך מוחלט.

* הזזה אופקית: פונקציות מהצורה: $g(x)=\frac{1}{f(x-p)}$, p חיובי או שלילי

* הזזה אנכית: פונקציות מהצורה: $y=\frac{1}{f(x)}+k$, k חיובי או שלילי

* שיקוף ביחס לציר ה- x: פונקציות מהצורה: $y=-\frac{1}{f(x)}$

* שיקוף ביחס לציר ה- y: פונקציות מהצורה: $y=\frac{1}{f(-x)}$

* מתיחה / כיווץ: פונקציות מהצורה: $y=\frac{a}{f(x)}$

* שילובים שונים של הטרנספורמציות: פונקציות מהצורה: $g(x)=\frac{a}{f(x-p)}+k$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי (לפחות 41 שעות)

בנוסף לפיתוח הכישורים הטכניים הקשורים בחקירת פונקציות מהסוגים המפורטים בהמשך באמצעות הנגזרת שלהן, בפרק זה יינתן ביטוי לשילוב ייצוגים שונים לפונקציות ונגזרותיהן: גרפי, סימבולי ומספרי.

הרחבת מאגר הפונקציות והפעולות הנעשות עליהן ירחיב את האפשרויות לפתרון בעיות מעשיות מתחומים רבים.

השימוש בטכנולוגיה תורם להטמעת החומר הנלמד.

מטרות על

- הבנת המבנה והתכונות של פונקציות רציונליות.
- הכרת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציות הרציונליות ודרך מציאתן.
- הכרת הנגזרת של פונקציה רציונלית.
- שימוש בנגזרת של פונקציה רציונלית ככלי מתמטי למציאת משוואת משיק, לחקירת פונקציות ופתרון שאלות ערך קיצון עבור פונקציות רציונליות.
- העמקה בפונקציית שורש.
- הבנת הקשר בין פונקציה לפונקציית הנגזרת שלה.

חשבון דיפרנציאלי של פונקציה רציונלית ופונקציית שורש (לפחות 21 שעות)

תכנים

- פונקציות מהסוגים הבאים:

* פונקציות רציונליות $y=\frac{f(x)}{g(x)}$, כאשר $f(x)$ ו- $g(x)$ פולינומים ממעלה שנייה לכל היותר.

סכום והפרש של פונקציות אלו עם פולינומים.

* פונקציות מהצורה $y=g(x)\cdot\sqrt{f(x)}$, כאשר $f(x)$ ו- $g(x)$ פולינומים ממעלה שנייה לכל היותר.

- נגזרות של הפונקציות האלו.
- תחום ההגדרה של הפונקציות האלו.
- משוואת משיק לגרף של פונקציות אלו בנקודה שעליהן.
- התנהגות בסביבת נקודת אי-הגדרה ואסימפטוטות מאונכות לציר ה- x (ללא נקודות אי הגדרה שמאפסות מונה ומכנה של פונקציה רציונלית).
- התנהגות של הפונקציות הרציונליות עבור $x\to\pm\infty$ ברמה אינטואיטיבית בלבד, ואסימפטוטות מאונכות לציר ה- y (אסימפטוטה אופקית).
- נקודות חיתוך של הגרפים של הפונקציות עם הצירים.
- חיוביות ושליליות של הפונקציות האלו כולל פתרון אי שוויונות מהסוג:

$\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)}>0$, כאשר $f(x)$ ו- $g(x)$ פולינומים ממעלה שנייה לכל היותר.

- תחומי העלייה והירידה של הפונקציות האלו.
- נקודות קיצון פנימיות ונקודות קיצון בקצה תחום ההגדרה של הפונקציות האלו.
- סרטוט סקיצה של הגרף של כל אחת מהפונקציות האלו, במסגרת חקירה של פונקציה.
- זוגיות או אי-זוגיות של פונקציות אלו - באופן אלגברי ובאופן גרפי.
- הקשר בין הגרף של כל אחת מהפונקציות האלו לבין גרף הנגזרת שלהן.
- שימוש בפרמטר: מציאת ערך פרמטר על סמך הנתון.
- ייעשה שימוש בפרמטר אחד בשאלה.

- שילוב מושגים ומיומנויות שנלמדו בקדם אנליזה של כיתה י' ו- י"א (כולל פעולות על פונקציה: הזזה אנכית, הזזה אופקית, שיקופים ביחס לצירים, מתיחה וכיווץ אנכיים, ערך מוחלט ושילובם).

הערה: מושג הנגזרת השנייה – מחוץ לתוכנית הלימודים ברמה של 4 יח"ל.

דגשים

מומלץ להשתמש בטכנולוגיה במהלך הוראת הנושאים השונים. השימוש בטכנולוגיה מאפשר הצגה גרפית של פונקציות וחקירת תכונותיהן כבדיקה וסיוע לחקירה האנליטית. הטכנולוגיה מאפשרת לחקור באופן דינאמי השפעה של פרמטרים על פונקציות, להמחיש פעולות על פונקציות ולהגיע להכללות. השימוש בכלים הגרפיים מזמן שאילת שאלות איכותניות.

שאלות ערך קיצון (לפחות 10 שעות)

תכנים

- פתרון שאלות קיצון, בתחום פתוח ובתחום סגור, עבור פונקציות רציונליות ופונקציות שורש כמפורט לעיל.
- שאלות הקיצון יעסקו בבעיות מספרים, בעיות כלכליות, פונקציות וגרפים, בעיות גאומטריות במישור, בעיות גאומטריות במרחב - כולל נפח, שטח פנים ומעטפת של תיבה.

חשבון אינטגרלי (לפחות 10 שעות)

מטרות על

- היכרות עם מושג האינטגרל הלא מסוים כפעולה הפוכה לפעולת הנגזרת.
- הכרת האינטגרל המסוים ככלי לחישוב שטח בין גרפים של פונקציות.

תכנים

- אינטגרלים של פונקציית פולינום ופונקציה רציונלית מהצורה: $y=\frac{c}{(ax+b)^2}$.
- מציאת פונקציה קדומה.
- מציאת פונקציה קדומה על פי הנגזרת ונקודה על גרף הפונקציה.
- אינטגרל מסוים.
- חישוב שטח בין גרף הפונקציה לציר x (הפונקציה יכולה להיות חיובית, שלילית או לשנות סימן).
- חישוב שטח בין גרפים של שתי פונקציות וחישוב שטחים מורכבים.
- שימוש בפרמטר: מציאת ערך פרמטר על סמך נתון.
- ייעשה שימוש בפרמטר אחד בשאלה.

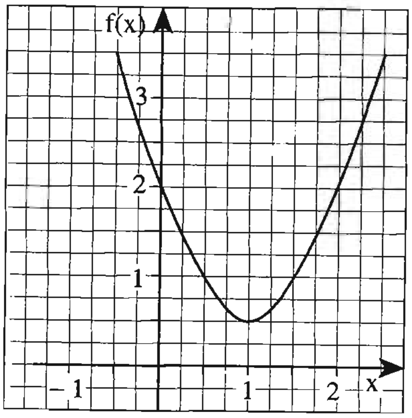
נספח: דוגמאות לשאלות על פי נושאי הלימוד

חלק א – דוגמאות בנושא התנהגות פונקציה

דוגמה 1

נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 + 7x - 12$. סרטט, במערכת צירים אחת, את הגרף של $f(x)$ ואת הגרף של $\frac{1}{f(x)}$.

דוגמה 2



נתון גרף של הפונקציה $f(x)$ בתחום $-0.5 \le x \le 2.5$.

א. רשום תחומי עלייה וירידה של $f(x)$ ושל $\frac{1}{f(x)}$.

ב. עבור אילו ערכי x יש ל- $f(x)$ ול- $\frac{1}{f(x)}$ אותו ערך?

ג. מה הן נקודות הקיצון המוחלטות של $f(x)$ ושל $\frac{1}{f(x)}$?

חלק ב – דוגמאות לשאלות בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי מבחינות הבגרות

דוגמה 1

(חקירת פונקציה רציונלית, הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת)

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{-x^2+2x+3}{x^2}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ד. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתון כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g'(x) = f(x)$.

($g'(x)$ ו־ $g(x)$ מוגדרות באותו תחום.)

העבירו משיקים לגרף הפונקציה $g(x)$ המקבילים לציר ה־ x .

מה הם שיעורי ה־ x של נקודות ההשקה של המשיקים האלה? נמק.

דוגמה 2

(חקירת פונקציה רציונלית, משוואת משיק)

נתונה הפונקציה $f(x) = 1 - \frac{1}{(x-5)^2}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את הסימן של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $x < 5$,

ומצא את הסימן של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $x > 5$.

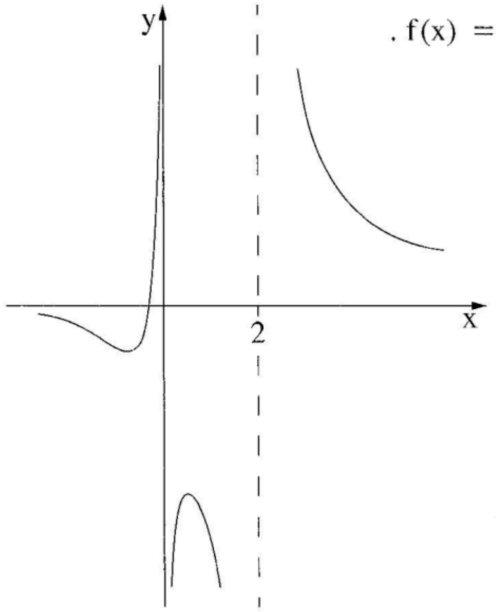
ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 4$.

מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של המשיק עם האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$.

דוגמה 3

(חקירת פונקציה רציונלית, הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת, שימוש בפרמטרים)



בציור שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה $f(x) = \frac{4x+1}{ax^2-2x}$.

a הוא פרמטר.

א. מצא את הערך של a .

הצב $a = 1$, וענה על הסעיפים ב, ג, ד.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

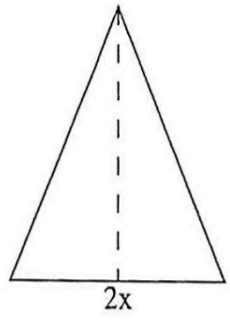
ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ד. (1) מה הן האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$?

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0 < x < 2$.

דוגמה 4

(בעיית קיצון גאומטרית הכוללת גזירת מכפלה של פולינום בשורש)



נתון משולש שווה־שוקיים שהיקפו 30 ס"מ.

א. סמן ב־ 2x את בסיס המשולש, והבע באמצעות x את גובה המשולש לבסיס.

ב. מה צריך להיות x כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?

ג. הראה כי המשולש שיש לו שטח מקסימלי הוא משולש שווה־צלעות.

דוגמה 5

1. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{x^2}$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה ואת האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

(2) מצאו את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$.

(1) על סמך תוצאות הסעיף הקודם סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) רשמו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של $f(x)$ ואת תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ג. העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y.

(1) רשמו את משוואת המשיק.

(2) מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי המשיק ועל ידי הישר $x=-1$.

ד. (1) אילו ערכים יכולה לקבל הפונקציה $f(x)$?

מגדירים פונקציה חדשה: $h(x)=\frac{1}{(x-2)^2}+a$.

(2) רשמו דוגמה של מספר a שעבורו הפונקציה $h(x)$ מקבלת ערכים גדולים מ- 1 .

(3) העבירו משיק לגרף הפונקציה $h(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y .

עבור ה- a שמצאתם בסעיף הקודם, האם השטח המוגבל על ידי $h(x)$, על ידי המשיק ועל ידי הישר $x=-1$ הוא גדול, שווה או קטן מהשטח שחישבתם בסעיף ג (2)? נמקו.

גאומטריה – כיתה י"א (40 שעות)

כפי שהיה בתוכנית הלימודים של כיתה י' , שלושת תחומי הגאומטריה בתוכנית: גאומטריה אוקלידית, טריגונומטריה וגאומטריה אנליטית, נלמדים בצורה משולבת.

גאומטריה אוקלידית

תכנים

<u>מעגל</u>

- הגדרות: מעגל כמקום גאומטרי, רדיוס, קוטר, קשת, מיתר, זווית מרכזית, זווית היקפית, מידה זוויתית של קשת (מדידת קשת באמצעות הזווית המרכזית הנשענת עליה), עיגול, גזרה, קשת קטנה / קשת גדולה המתאימות למיתר (בהסתמך על הזווית המרכזית).

  <u>משפטים:</u>

  - אנך למיתר, העובר דרך מרכז המעגל, חוצה את המיתר.
  - ישר העובר דרך מרכז המעגל ואשר חוצה את המיתר, מאונך למיתר.
  - ישר המאונך למיתר וחוצה את המיתר, עובר דרך מרכז המעגל.
- תכונות של זוויות היקפיות, זוויות מרכזיות, והקשר בין זווית היקפית לזווית מרכזית.

  תכונות הקשורות לקשתות ומיתרים.

  <u>משפטים:</u>

  - במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו אם ורק אם שני המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.
  - במעגל, אם שתי קשתות שוות זו לזו אז שני המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.
  - אנך למיתר, העובר דרך מרכז המעגל, חוצה את הזווית המרכזית / הקשת המתאימה למיתר.
  - במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הקשת שעליה היא נשענת.

    במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת.
  - במעגל, זוויות היקפיות הנשענות על אותה הקשת, שוות זו לזו.

- במעגל, לזוויות היקפיות שוות, מתאימות קשתות שוות ומיתרים שווים.
- במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות.
- במעגל, זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה ($90°$).
- במעגל, זווית היקפית בת $90°$ נשענת על קוטר.

<u>משיקים למעגל</u>

- הגדרה של משיק למעגל.
- תכונות של משיק למעגל.

<u>משפטים</u>:

- משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.
- ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל.
- אם מנקודה מחוץ למעגל עוברים שני משיקים למעגל, אז קטעי המשיקים המחברים את הנקודה עם נקודות ההשקה שווים באורכם.
- הקטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל חוצה זווית בין המשיקים.
- אם שני משיקים מקבילים זה לזה, אז הקטע המחבר את נקודות ההשקה הוא קוטר במעגל.

<u>משולש ומרובע חסום במעגל</u>

<u>משפטים</u>:

- כל משולש ניתן לחסום במעגל.
- במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש.
- ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם הסכום של זוג זוויות נגדיות של המרובע שווה ל- $180°$.
- אם טרפז חסום במעגל אז הוא טרפז שווה שוקיים.

<u>משולש חוסם מעגל</u>

<u>משפטים</u>:

- שלושת חוצי הזוויות של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש.
- בכל משולש אפשר לחסום מעגל.

היקף מעגל ושטח עיגול

- חישוב היקף של מעגל.
- חישוב שטח של עיגול.

טריגונומטריה במישור

תכנים

משפט הסינוסים: במשולש ABC מתקיים: $\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}=2R$

(R רדיוס המעגל החוסם את המשולש, a,b,c אורכי צלעות המשולש, $\angle A, \angle B, \angle C$ הגדלים של זוויות המשולש שמול הצלעות, בהתאמה)

שטח של צורות גאומטריות

שטח משולש שווה למחצית מכפלת שתי צלעות בסינוס הזווית שביניהן.

שטח מקבילית שווה למכפלת שתי צלעות סמוכות בסינוס הזווית שביניהן.

חישוב שטח של צורות גאומטריות תוך הסתמכות על הידע שנצבר עד כה.

המספר π (העשרה)

אומדן מספר π על סמך חישוב שטחים של סדרה עולה של מצולעים משוכללים חסומים / חוסמים.

- **כולל הסבר כללי על קיום מספר המבטא את היחס בין היקף המעגל לקוטרו לבין שטח המעגל לריבוע הרדיוס שלו.**
- **מומלץ ללוות את הלימוד ברקע היסטורי על חישובי π בתקופות שונות ובתרבויות שונות.**

גאומטריה אנליטית

תכנים

<u>מעגל</u>

- משוואה קנונית של מעגל: $x^2 + y^2 = R^2$ (R רדיוס המעגל)
- משוואה כללית של מעגל: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

  (שיעורי מרכז המעגל (a,b) ו- R רדיוס המעגל).

הערה: משוואת המעגל היא הביטוי האנליטי של הגדרת המעגל כמקום גאומטרי.

<u>מעגל וישר</u>

- קביעת המצב ההדדי בין מעגל וישר בשתי הדרכים הבאות:
  * באמצעות השוואת הרדיוס למרחק מרכז המעגל מהישר.
  * באמצעות פתרון מערכת משוואות המורכבת ממשוואת המעגל וממשוואת הישר.
- מציאת משוואת המשיק למעגל בנקודה שעל המעגל (כתנאי ניצבות).
- מעגל המשיק לאחד הצירים או לשניהם.

פריסה אפשרית של תוכנית הלימודים בגאומטריה – כיתה י"א

תכנון הוראת הגאומטריה, בשילוב של שלושת תחומי הגאומטריה, יכולה להיעשות במספר דרכים.

להלן שתי אפשרויות לרצף של הוראת הנושאים השונים. ניתן להתנהל ברצפים נוספים.

אפשרות ראשונה

הערה: לאורך הוראת הנושאים החדשים, דרוש ידע מחטיבת הביניים ומכיתה י'.

מס'	נושא	הערות	מספרי דוגמאות
א1	**גאומטריה אוקלידית -** הגדרת מעגל כמקום גאומטרי, הגדרת מושגים בסיסיים במעגל (רדיוס, קוטר, קשת, מיתר, זווית מרכזית, זווית היקפית, מדידת קשת, עיגול, גזרה).		
א2	**גאומטריה אנליטית** – משוואה קנונית של מעגל, משוואה כללית של מעגל, מצב הדדי בין מעגל לישר.		4
א3	**גאומטריה אוקלידית + גאומטריה אנליטית** – משפטים במעגל הקשורים למיתרים במעגל, לזוויות מרכזיות, וזוויות היקפיות. הערה: החל משלב זה ניתן לשלב גם נושאים	בשלב זה בהוראה, גאומטריה אוקלידית וגאומטריה אנליטית שזורות זו בזו. הוראת המשפטים יכולה להיעשות בשילוב של הדרכים הבאות: - העלאת השערה בנוגע לתכונה, בדרך אינדוקטיבית (תוך שימוש בכלים ממוחשבים המאפשרים מדידות), הוכחת ההשערה	1 ,10 ,11

	בטריגונומטריה שנלמדו בכיתה י'.	בגאומטריה אוקלידית, וידוא התכונה בכלים של גאומטריה אנליטית כבקרה. - הוכחת התכונה באמצעות גאומטריה אוקלידית, וידוא התכונה בכלים של גאומטריה אנליטית. - העלאת השערה בנוגע לתכונה, בדרך אינדוקטיבית – תוך שימוש בכלים של גאומטריה אנליטית, הוכחת ההשערה בגאומטריה אוקלידית. <u>הערה</u>: ניתן להחליף את ההוכחה בגאומטריה אוקלידית, בהוכחה בכלים של גאומטריה אנליטית, במקרים בהם ההוכחה לא מורכבת מדי.	
4א	**גאומטריה אוקלידית** – משולש ומרובע חסום במעגל – הגדרה ומשפטים.		2
5א	**טריגונומטריה** – משפט הסינוסים	החל משלב זה בהוראה, שלושת התחומים: גאומטריה אוקלידית, גאומטריה אנליטית וטריגונומטריה, שזורים זה בזה.	7 ,3 ,5 ,6
6א	**גאומטריה אוקלידית + גאומטריה אנליטית** – משיק למעגל – הגדרה ותכונות.		9 ,8
7א	**גאומטריה אוקלידית + גאומטריה אנליטית** – משולש חוסם מעגל – הגדרה ומשפטים.		12

אפשרות שנייה

<u>הערה</u>: לאורך הוראת הנושאים החדשים, דרוש ידע מחטיבת הביניים ומכיתה י'.

מס'	נושא	הערות	מספרי דוגמאות
ב1	**גאומטריה אוקלידית -** הגדרת מעגל כמקום גאומטרי, הגדרת מושגים בסיסיים במעגל (רדיוס, קוטר, קשת, מיתר, זווית מרכזית, זווית היקפית, מדידת קשת, עיגול, גזרה).	הדגשה שקוטר הוא מיתר וכי הוא המיתר הארוך ביותר(מתוך אי שוויון המשולש).	
ב2	**גאומטריה אוקלידית** – משפטים במעגל הקשורים למיתרים במעגל, לזוויות מרכזיות, וזוויות היקפיות.		
ב3	**טריגונומטריה** – תרגול המשפטים במעגל, שנלמדו עד כה, תוך שילוב של טריגונומטריה וגאומטריה אוקלידית.	דרוש ידע קודם בטריגונומטריה של משולש ישר זווית (כיתה י').	
ב4	<u>נושא 4ב</u>: **גאומטריה אנליטית** – משוואה קנונית של מעגל, משוואה כללית של מעגל, מצב הדדי בין מעגל וישר.	בשלב זה בהוראה, שלושת התחומים (גאומטריה אוקלידית, גאומטריה אנליטית וטריגונומטריה) שזורים זה בזה. לכן, התרגול של המשפטים שנלמדו עד כה יכול להיעשות בשילוב של שלושת התחומים. בנוסף, ר' הערה בנושא 3א באפשרות הראשונה.	1, 4, 10, 11

מכאן ההמשך כמו באפשרות הראשונה מנושא 4 ואילך.

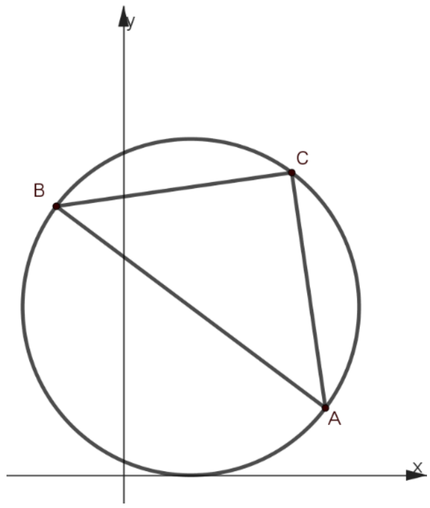
<u>הערה</u>: ניתן לעשות שילובים נוספים, מעבר לשתי האפשרויות הללו.

נספח– דוגמאות

<u>הערה</u>: בדוגמאות שבהמשך, חלק מהסעיפים הם חזרה על הנלמד בכיתה י'. ידע זה דרוש לצורך קישור לנלמד בכיתה י"א

שאלה לבדיקת תכונה גאומטרית (ללא מחשב ובאמצעות מחשב)
שילוב של גאומטריה אנליטית עם גאומטריה אוקלידית

(דוגמה מס' 1)



נתון מעגל: $(x-2)^2+(y-5)^2=25$

1. (1) נתונות הנקודות: $A(6,2)$ ו- $B(-2,8)$
   (i) בדקו שהנקודות A ו- B נמצאות על המעגל.
   (ii) בדקו ש- AB הוא קוטר במעגל.
   העבירו את הקוטר AB.
   (2) בחרו נקודה $C(5,9)$.
   * בדקו שהיא נמצאת על המעגל.
   * חשבו את שיפוע הישר AC ואת שיפוע הישר BC
   * הסיקו מסקנה בנוגע לזווית .ACB
2. (1) בחרו נקודה נוספת $D(5,7)$ שעל המעגל. חזרו על התהליך בסעיף 1(2) וחשבו את גודל הזווית ADB. מה קיבלתם?
   (2) בחרו נקודה $P(-1,1)$ חדשה שעל המעגל וחשבו את גודל הזווית APB. מה קיבלתם?
3. העלו השערה לגבי זווית היקפית הנשענת על קוטר.

לפניכם היישומון: [זווית היקפית הנשענת על קוטר](#).

4. (1) בחרו נקודה $C(5,9)$ ביישומון ובדקו את תוצאות חישוב הזווית בסעיף 1(2).
5. (2) הזיזו ביישומון את הנקודה C לנקודות נוספות על המעגל ועקבו אחר הזווית ACB .
6. האם השערתכם בסעיף 3 נכונה?
   אם כן, נסחו את המשפט בנוגע לזווית ההיקפית הנשענת על קוטר, והוכיחו אותו.

7. (1) העבירו קוטר נוסף דרך נקודות חדשות $E(7,5)$ ו- $F(-3,5)$ שעל המעגל.
   (2) בחרו נקודות $A(6,2)$ ו-$B(-2,8)$ שעל המעגל וחשבו את גודל זווית EAF

ואת גודל זווית EBF .

3)) איזה מרובע הוא AEBF ?

8. הוכיחו את השערתכם, לפי ההנחיות הבאות:
   - העבירו שני קטרים במעגל.
   - חברו את קצות הקטרים כך שיוצר מרובע.
   - קבעו מהו סוג המרובע המתקבל והוכיחו זאת.

<u>הערה</u>: בשאלה זו ניתן היה לבקש כסעיף ראשון להוכיח, באמצעות גאומטריה אוקלידית, את המשפט: "זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה", ובסעיפים הבאים לוודא תכונה זו עבור מקרים מסוימים, באמצעות כלים גאומטריה אנליטית (למשל, באמצעות חישוב שיפועי המיתרים).

הדגמת הגישה של חשיבה אינדוקטיבית ודדוקטיבית

שילוב של גאומטריה אנליטית עם גאומטריה אוקלידית

(דוגמה מס' 2)

<u>שאלה ראשונה</u>

נתון משולש ששיעורי קודקודיו הם: . C(-2 , 4) ; B(7 , 1) ; A(6 , 8)

1. סרטטו את המשולש במערכת צירים.
2. מצאו את המשוואות של שניים מהאנכים האמצעיים לצלעות המשולש.
3. מצאו את נקודת החיתוך (S) של שני האנכים האמצעיים.
4. האם האנך האמצעי לצלע השלישית עובר גם הוא באותה נקודת חיתוך (S) שמצאתם בסעיף ב'? הסבירו.
5. העלו השערה בנוגע לאורכים SA, SB, SC. בדקו את השערתכם באמצעות חישוב.
6. מצאו את משוואת המעגל שמרכזו S ורדיוסו הוא אורך אחד הקטעים SA, SB SC.

כיצד נקרא מעגל זה?

<u>שאלה שנייה</u>

נתון משולש ששיעורי קודקודיו הם C(6,8 ; B(7,1) ; A(0,0).

חזרו על סעיפים 1-6 בשאלה ראשונה.

שאלה שלישית

נתון משולש ששיעורי קודקודיו הם $C(-2,4)$; $B(6,0)$; $A(0,0)$.

חזרו על סעיפים 1-6 בשאלה הראשונה.

שאלה רביעית

1. תארו באופן כללי, את האופן שבו ניתן למצוא את משוואת המעגל החוסם משולש, על פי שלושת קודקודיו.
2. האם באופן זה ניתן לחסום כל משולש ששלושת קודקודיו נתונים? הסבירו.

הערה: במידה והתלמידים למדו את המשפט בנוגע למרכז המעגל החוסם משולש, ניתן לבקש מהם לנסח את המשפט עליו הם מסתמכים.

הדגמת הגישה של חשיבה אינדוקטיבית ודדוקטיבית

שילוב של גאומטריה אוקלידית עם גאומטריה אנליטית וטריגונומטריה

(דוגמה מס' 3)

<u>שאלה ראשונה</u>

נתון משולש חד זוויות ששיעורי קודקודיו הם: $A(-5,12)$, $B(-6,5)$, $C(3,8)$

1. (1) סרטטו את המשולש במערכת צירים.

(2) מצאו את משוואות האנכים האמצעיים לצלעות AC ו- BC.

(3) חשבו את השיעורים של מרכז המעגל החוסם משולש זה.

(4) מצאו את משוואת המעגל החוסם משולש זה.

(5) היכן נמצא מרכז המעגל החוסם: בתוך המשולש, על אחת מצלעות המשולש או מחוץ למשולש?

2. חשבו את גודל הזווית BAC.

<u>שאלה שנייה</u>

נתון משולש ששיעורי קודקודיו הם: $A(5,6)$, $B(-1,2)$, $C(0,7)$.

א. (1) סרטטו את המשולש במערכת צירים

(2) הוכיחו כי המשולש הוא ישר זווית.

ב. (1) היכן נמצא מרכז המעגל החוסם: בתוך המשולש, על אחת מצלעות המשולש או מחוץ למשולש?

(2) חשבו את השיעורים של מרכז המעגל החוסם משולש זה.

(3) מצאו את משוואת המעגל החוסם משולש זה.

ג. חשבו את גודל הזווית BAC.

<u>שאלה שלישית</u>

נתון משולש <u>קהה זווית</u> ששיעורי קודקודיו הם . $A(1,5)$, $B(-1,1)$, $C(3,5)$

א (1) סרטטו את המשולש במערכת צירים.

(2) מצאו את משוואות האנכים האמצעיים לצלעות AC ו- BC.

(3) חשבו את השיעורים של מרכז המעגל החוסם משולש זה.

(4) מצאו את משוואת המעגל החוסם משולש זה.

(5) היכן נמצא מרכז המעגל החוסם: בתוך המשולש, על אחת מצלעות המשולש או מחוץ למשולש?

(6) חשבו את גודל הזווית BAC אם ידוע כי היא זווית קהה.

שאלה רביעית

א. הסבירו היכן נמצא מרכז המעגל החוסם משולש: בתוך המשולש, על אחת מצלעות המשולש או מחוץ למשולש, בהתאם לסוג משולש (חד זווית, קהה זווית, ישר זווית).

ב. תארו באופן כללי, את האופן שבו ניתן למצוא את זוויות המשולש, כאשר נתונים השיעורים של שלושת קודקודי המשולש.

שאלות המשלבת גאומטריה אנליטית עם גאומטריה אוקלידית

(דוגמה מס' 4)

שאלה ראשונה

נתון: מעגל שמרכזו (3,1) ורדיוסו R=5, ומשוואת הישר $y = 2x$.

קבעו מה המצב ההדדי בין המעגל לישר (הישר חותך את המעגל בשתי נקודות / הישר משיק למעגל – חותך את המעגל בנקודה אחת / הישר אינו חותך את המעגל בשתי דרכים:

- האחת – חשבו את המרחק של מרכז המעגל מהישר.

(רמז: מצאו את משוואת האנך ממרכז המעגל לישר, לאחר מכן מצאו את נקודת החיתוך בין הישר לאנך, ואז חשבו את המרחק).

- השנייה – מצאו את מספר נקודות החיתוך בין הישר למעגל.

שאלה שנייה

נתון: מעגל שמרכזו (2-,3) , רדיוסו $R = \sqrt{20}$ ומשוואת הישר $y = -2x + 6$.

קבעו מה המצב ההדדי בין המעגל לישר (הישר חותך את המעגל בשתי נקודות / הישר משיק למעגל – חותך את המעגל בנקודה אחת / הישר אינו חותך את המעגל) בשתי דרכים:

- האחת – חשבו את המרחק של מרכז המעגל מהישר (ראו רמז בשאלה הראשונה).
- השנייה – מצאו את מספר נקודות החיתוך בין הישר למעגל.

<u>שאלה שלישית</u>

נתון: מעגל שמרכזו (1-,3) ורדיוסו $R=4$, משוואת הישר $y=-x+10$.

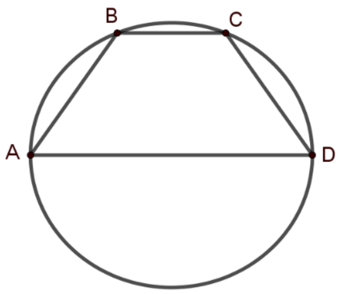
קבעו מה המצב ההדדי בין המעגל לישר (הישר חותך את המעגל בשתי נקודות / הישר משיק למעגל – חותך את המעגל בנקודה אחת / הישר אינו חותך את המעגל) בשתי דרכים:

- האחת – חשבו את המרחק של מרכז המעגל מהישר (ראו רמז בשאלה הראשונה).
- השנייה – מצאו את מספר נקודות החיתוך בין הישר למעגל.

שילוב של גאומטריה אוקלידית עם גאומטריה אנליטית וטריגונומטריה

(דוגמה מס' 5)

1. הוכיחו שטרפז החסום במעגל הוא טרפז שווה שוקיים.



2. במעגל: $(x-7)^2+(y-20)^2=169$ חסום מרובע ABCD

ששיעורי קודקודיו הם: ; A(-6,20) ; B(2, 32) ; C(12,32) D(20,20)

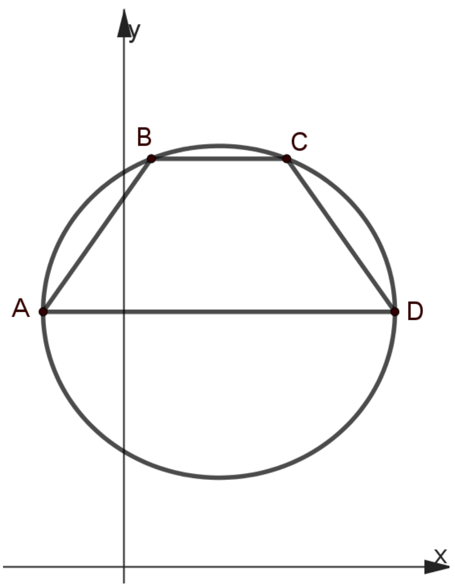
(1) הראו שהמרובע הוא טרפז שווה שוקיים.

(2) חשבו את זוויות הטרפז.

(3) חשבו את שטח הטרפז.

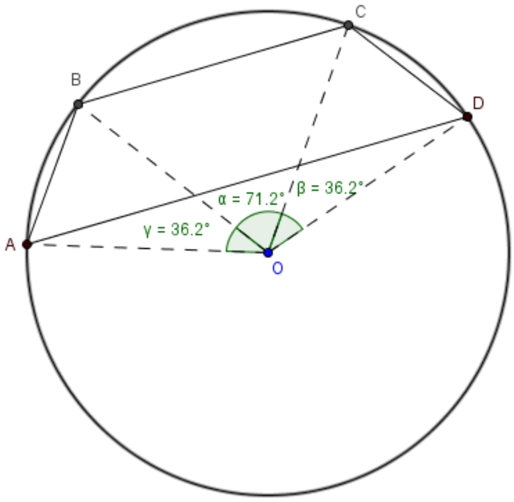
הערות:

- בדוגמה זו ניתן לבקש מהתלמידים ליצור את הסרטוט בעצמם,
- כדי שישימו לב למיקום הנקודות מומלץ לפתור את הסעיפים ב(2) ו- ב(3) בדרכים שונות.



שילוב של גאומטריה אוקלידית עם גאומטריה אנליטית וטריגונומטריה

(דוגמה מס' 6)



במעגל חסום טרפז ABCD .

נקודה O(6, 2) היא מרכז המעגל,

ונקודה A(-2,2) נמצאת על המעגל.

כמו כן נתון כי:

∢ = 36.2°AOB = ∢COD

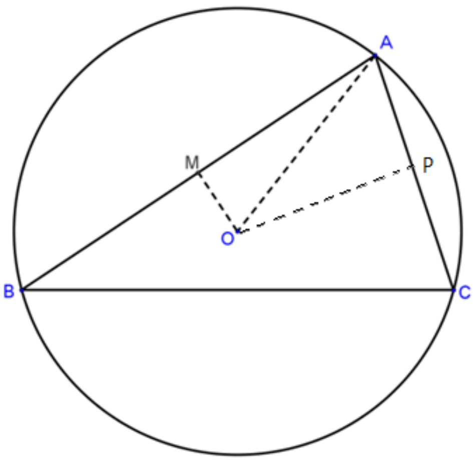
ו- 71.2°= ∢ BOC

חשבו את שטח הטרפז ABCD

(באמצעות חיבור וחיסור שטחי משולשים)

שילוב של גאומטריה אוקלידית וטריגונומטריה

(דוגמה מס' 7)



משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O.

OM מאונך לצלע AB .

1. הוכיחו כי ∢ACB = ∢AOM

ידוע שהמרחק של מרכז המעגל מהצלע AB

הוא 8 .

וכן: ∢ACB = 72° AC=18 .

2. חשבו את צלעות המשולש ABC לפי הסעיפים הבאים:

(1) חשבו את רדיוס המעגל.

(2) חשבו את שתי הזוויות האחרות במשולש ABC.

(3) חשבו את שתי הצלעות האחרות במשולש ABC.

3. (1) חשבו את היקף המשולש ABC.

(2) חשבו את שטח המשולש ABC.

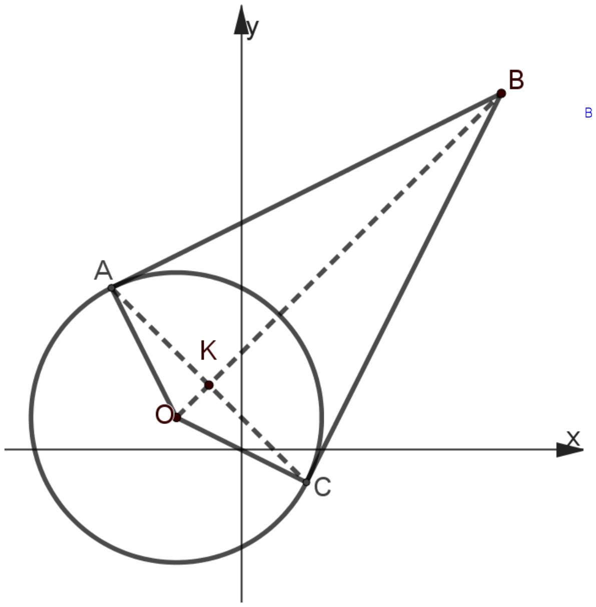
4. (1) הנקודה P היא אמצע הצלע AC. הסבירו מדוע OP מאונך ל- AC.

(2) מהו המרחק בין O לצלע AC?

(3) מהו השטח של משולש AOC ?

שילוב של גאומטריה אוקלידית, טריגונומטריה וגאומטריה אנליטית

(דוגמה מס' 8)



AB ו- BC משיקים למעגל בנקודות

A ו- C בהתאמה. O מרכז המעגל.

אלכסוני המרובע ABCO נפגשים בנקודה K.

נתון: B(8, 11) , K(-1,2) , O(-2,1) .

1. חשבו את היקף המרובע ABCO ואת שטחו,
בהתאם לסעיפים הבאים:
(1) הוכיחו כי $OB \perp AC$.
(2) הוכיחו כי $\measuredangle AOK = \measuredangle BAK$.
(3) הוכיחו כי המשולשים OAK ו- ABK
דומים.
(4) חשבו את אורך הקטע AK.
(5) חשבו את היקף המרובע . ABCO
(6) חשבו את שטח המרובע ABCO.
2. חשבו את זוויותיו של המרובע OABC.
3. (1) מצאו את משוואת המעגל. (2) מצאו את משוואת המיתר AC. (3) מצאו
את שיעורים הקודקודים A ו– C.
4. האם ניתן לחסום את המרובע OABC במעגל? הסבירו.
במידה וניתן, מצאו את משוואת המעגל.

שילוב של גאומטריה אוקלידית עם גאומטריה אנליטית

(דוגמה מס' 9)

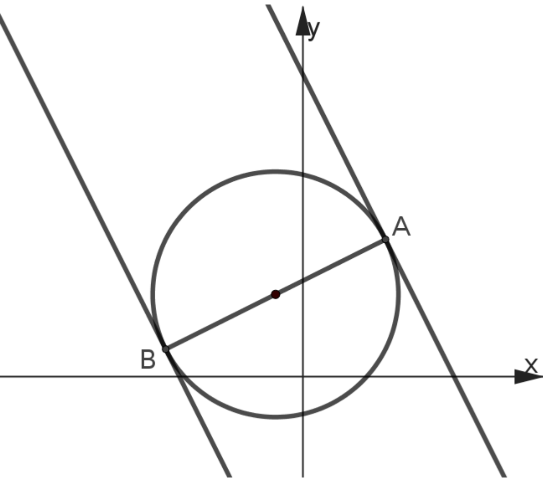
<u>משימה ראשונה</u>

נתונה משוואת המעגל $(x-2)^2+(y+3)^2=25$.

1. (1) סרטטו את המעגל במערכת צירים.
   (2) מבין כל הנקודות שעל המעגל, מהם שיעורי הנקודה A בעלת ה- y הגדול ביותר?
   (3) מבין כל הנקודות שעל המעגל, מהם שיעורי הנקודה B בעלת ה- y הקטן ביותר?
   (4) האם המיתר המחבר את הנקודות A ו- B הוא קוטר? נמקו.
   (5) מצאו את משוואת המשיק למעגל בנקודה A.
   (6) מצאו את משוואת המשיק למעגל בנקודה B.
   (7) מה המצב ההדדי בין שני המשיקים? נמקו.
2. ידוע כי CD הוא קוטר במעגל. הנקודה C נמצאת ברביע השני ושיעור ה-y שלה הוא 1.
   (1) מצאו את שיעור ה- x של נקודה C ואת משוואת המשיק בנקודה זו.
   (1) מצאו את שיעור ה- x של נקודה D ואת משוואת המשיק בנקודה זו.
   (3) מהו המצב ההדדי בין המשיק בנקודה C למשיק בנקודה D? נמקו.
3. נתונה גם נקודה E.(5,-7)
   (1) מדוע CE הוא מיתר במעגל?
   (2) האם CE הוא קוטר במעגל? נמקו.
   (3) מצאו את משוואות המשיקים למעגל בנקודות C ו- E.
   (4) מה המצב ההדדי בין שני המשיקים הללו? נמקו.
4. (1) נסחו השערה כללית המתייחסת למצב הדדי של משיקים בקצוות הקוטר.
   (2) הוכיחו השערה זו.

<u>הערה</u>: בפעילות זו נעשה שימוש בכלים של גאומטריה אנליטית לצורך העלאת השערה בנוגע לתכונה, ולאחר מכן הוכחת ההשערה בגאומטריה אוקלידית.
אפשרות אחרת היא לשנות את הסדר: להציג את המצב הגאומטרי של העברת משיקים בקצות הקטע ובקשה להוכיח תכונה זו באמצעות גאומטריה אוקלידית ולאחר מכן לוודא את התכונה בכלים של גאומטריה אנליטית .

משימה שנייה



1. נתונה משוואת המעגל $(x+1)^2+(y-3)^2=20$.

1. הישרים הבאים משיקים למעגל בנקודות A ו- B בהתאמה:

$2x+y=11$ ו- $-2x-y=9$

i) מהו המצב ההדדי בין שני המשיקים? נמקו.

ii) מצאו את שיעור הנקודות A ו- .B

iii) הראו באמצעות חישובים כי AB הוא קוטר במעגל.

2. הישרים הבאים משיקים למעגל בנקודות C ו- D בהתאמה:

$6x-3y=15$ ו- $-2x+y=15$

i) מה המצב ההדדי בין שני המשיקים? נמקו.

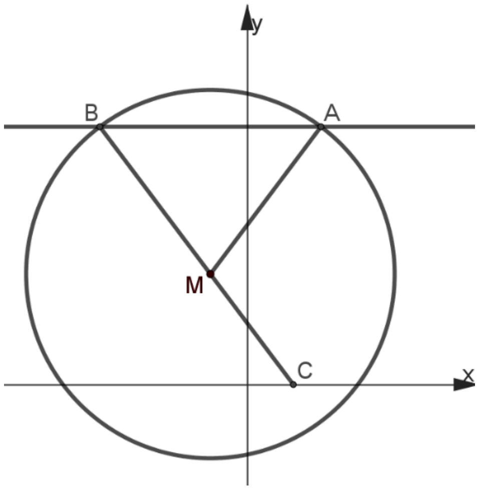
ii) מצאו את שיעור הנקודות C ו- . D

iii) הראו באמצעות חישובים כי CD הוא קוטר במעגל.

הערה: המשימה מדגימה את המשפט: אם שני משיקים למעגל נתון מקבילים זה לזה, אז הקטע המחבר את נקודות ההשקה הוא קוטר במעגל.

שילוב של גאומטריה אנליטית עם טריגונומטריה

(דוגמה מס' 10)



נתון המעגל $(x+1)^2+(y-3)^2=25$ שמרכזו M .

הישר $y = 7$ חותך את המעגל בנקודות A ו- B , כמתואר בציור.

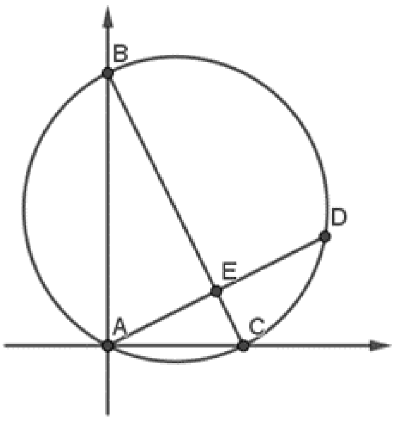
1. מצאו את השיעורים של הנקודות A ו- B .
2. חשבו את שטח המשולש BMA .
3. חשבו את גודל הזווית BMA .

הישר BM חותך את ציר ה- x בנקודה C .

4. מצאו את שיעורי הנקודה C .
5. חשבו את שטח המשולש AMC .

שילוב של גאומטריה אנליטית עם גאומטריה אוקלידית

(דוגמה מס' 11)



מעגל חותך את הצירים בנקודות A, B, C, כמתואר בציור.

הנקודה A היא ראשית צירים.

ישר העובר דרך A ומאונך ל-BC, חותך את BC בנקודה E

וחותך את המעגל בנקודה נוספת D .

א. (1) הוכיחו כי BC קוטר במעגל.

(2) הוכיחו כי AE=ED.

נתונה משוואת המעגל: $(x-2)^2+(y-4)^2=20$

ב. מצאו את שיעורי הנקודות B ו- C.

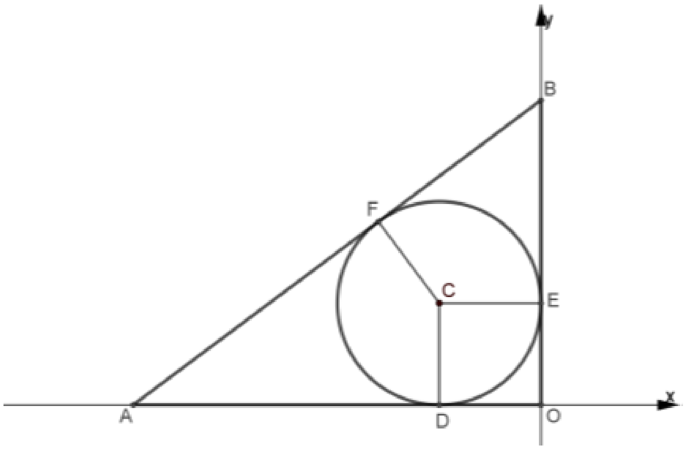
ג. (1) מדוע המשולש ABD הוא שווה שוקיים?

(2) איזה מרובע הוא מרובע ABDC? נמקו.

ד. חשבו את שטח המרובע ABDC.

שילוב של גאומטריה אנליטית, גאומטריה אוקלידית וטריגונומטריה

(דוגמה מס' 12)



המשולש ABO הוא ישר זווית.

הנקודה O היא ראשית הצירים.

הצלע AO נמצאת על ציר ה-x, והצלע BO נמצאת על ציר ה-y (ראה ציור).

במשולש ABO חסום מעגל שמרכזו C (הנקודה C נמצאת ברביע השני).

הצלעות AO, BO ו- AB משיקות למעגל בנקודות D, E ו- F בהתאמה.

א. (1) הוכיחו: המרובע OECD הוא ריבוע.

(2) הוכיחו: המרובע ADCF הוא דלתון.

נתון: D(-2,0).

ב. מצאו את משוואת המעגל.

נתון: שיפוע הצלע AB הוא $\frac{3}{4}$.

ג. (1) חשבו את גודל הזווית CAD.

(2) חשבו את שטח הטרפז ACEO .

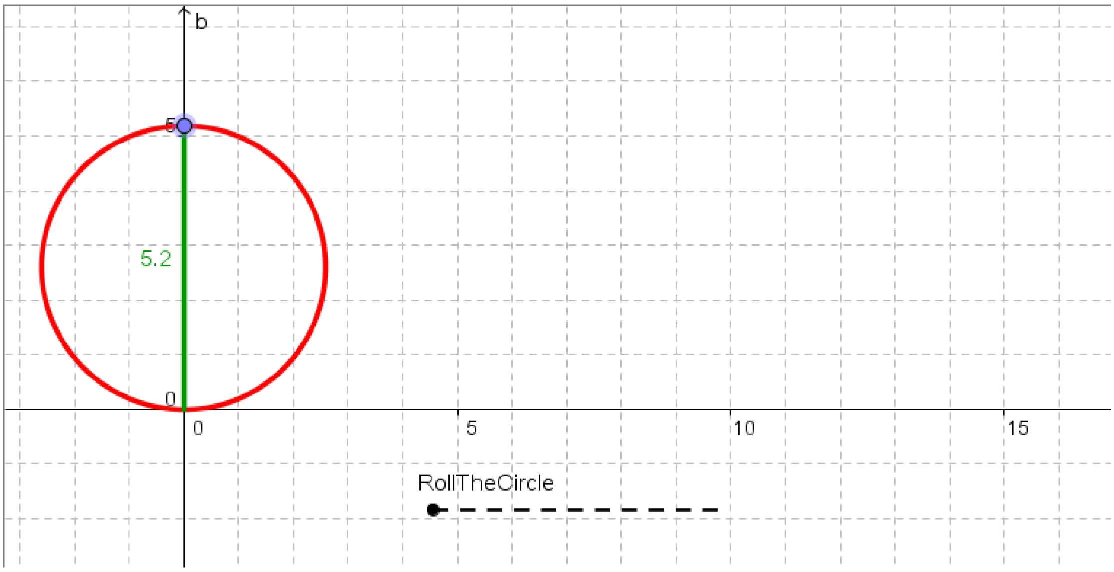
שילוב של גאומטריה אוקלידית עם טריגונומטריה

בהקשר לאומדן של המספר פאי

דוגמה (המחשה של היחס בין היקף המעגל לבין קוטרו – המחשת משמעות π וקירוב לערכו)

ביישומון בכתובת זו:

1. קבעו את הערך של קוטר המעגל (ע"י גרירת הנקודה הכחולה)



2. אמדו את היקף המעגל, על ידי גלגול של העיגול לאורך ציר x (ע"י הזזה של הסרגל RollTheCircle).
3. מה הקשר בין היקף המעגל לבין קוטר המעגל?

סטטיסטיקה – כיתה י"א (35 שעות)

חזרה על תכנים שנלמדו בכיתה י' – ממוצע וסטיית תקן (4 שעות)

התפלגות נורמלית (15 שעות)

מבוא

בתוכנית הלימודים של כיתה י' התלמידים למדו לחשב את ההסתברויות של משתנים בדידים, כאשר נתונות השכיחויות שלהם.
פרק זה עוסק במשתנים מקריים (לאו דווקא בדידים) וצורות שונות של ההתפלגות שלהם. "התפלגות" היא מושג מרכזי בסטטיסטיקה שמראה התאמה בין ערכים אפשריים של משתנה מקרי לבין הסתברות הופעתם. התפלגות נורמלית היא צורת ההתפלגות של משתנה מקרי הנפוצה ביותר. פוגשים את ההתפלגות הנורמלית בחקר תופעות בפיזיקה, ביולוגיה, כלכלה, רפואה ותחומי מחקר אחרים.

מטרות כלליות

1. התלמיד יכיר תופעות במדעים, בחברה ובכלכלה המתפלגות נורמלית ותופעות שלא מתפלגות נורמלית.
2. התלמיד יבין שצורת גרף ההתפלגות הנורמלית נקבעת על ידי ממוצע כמדד מרכז וסטיית תקן כמדד פיזור.
3. התלמיד יבין את משמעות התכונות של ההתפלגות הנורמלית: סימטריה, ריכוז מרבית הנתונים במרכז ודעיכה מהירה בקצות הגרף.
4. התלמיד יבין שהשטח החלקי שמתחת לעקומה של ההתפלגות הנורמלית מייצג את ההסתברות או את החלק היחסי או את האחוז המתאים של קבוצה בעלת תכונה משותפת.
5. התלמיד יבין את המשמעות של ציוני תקן ואת השימוש בהם לקביעת המיקום של נתון בודד בהשוואה לשאר האוכלוסייה.
6. התלמיד יבין שההתפלגות הנורמלית משמשת כבסיס אחיד להשוואות נתונים של אוכלוסיות גדולות שונות.
7. התלמיד יכיר התפלגות נורמלית סטנדרטית (0,1) , את ייצוגה הגרפי ואת הטבלה המלאה של ההתפלגות הנורמלית המצטברת.

תכנים

- ציוני תקן כמדד למיקום יחסי (בכל התפלגות)
- תכונות עקומת ההתפלגות הנורמלית
- שימושים בעקומה של ההתפלגות הנורמלית:

א. מציאת הסתברות או מציאת החלק היחסי (באחוזים) של קבוצה עם תכונה משותפת.

ב. מציאת תכונה של קבוצה בהינתן החלק היחסי של הקבוצה.

- שימוש בטבלה המלאה של ההתפלגות הנורמלית (0,1) המצטברת.
- שילוב בין התפלגות נורמלית עם נושאים בהסתברות ובסטטיסטיקה.

פירוט התכנים

<u>ציון תקן</u>

- הכרת המושג ומשמעותו כמיקום יחסי של נתון גולמי מתוך אוכלוסייה ביחס לממוצע הנמדד ביחידות של סטיות התקן. כלומר, משמעותו כמספר סטיות התקן של הנתון מהממוצע.
(יש לשים לב שציון תקן ניתן לחישוב בכל קבוצת נתונים מספריים, ללא קשר לסוג ההתפלגות)
- חיוביות ושליליות של ציוני התקן ומשמעותן.
- שימוש בציוני תקן להשוואת מיקום יחסי של נתונים גולמיים, באוכלוסיות השונות בממוצע ובסטיית התקן שלהן.
- תכונות של ציוני התקן:
  - ממוצע ציוני התקן שווה ל- 0
  - סטיית התקן של ציוני התקן שווה ל- 1
  - ציון התקן הוא גודל ללא ממד.

התפלגות נורמלית

- ייצוגים גרפיים של התפלגויות שונות (כגון, התפלגות בעלת זנב ימני, התפלגות בעלת זנב שמאלי), ההבדלים בין ההתפלגויות ומשמעותם.
- תופעות שבהן התפלגות הנתונים היא נורמלית.
- תופעות שבהן התפלגות הנתונים אינה התפלגות נורמלית.
- תכונות של עקומה נורמלית:
  - הבנת משמעות העקומה של ההתפלגות הנורמלית והשטח המצטבר מתחת לעקומה.
  - סימטריה של העקומה של ההתפלגות הנורמלית ביחס לממוצע.
  - אפשרות אומדן פיזור נתונים סביב הממוצע על סמך צורת העקומה של ההתפלגות הנורמלית.
  - התלכדות השכיח, החציון והממוצע.
- עקומת ההתפלגות הנורמלית של ציוני התקן והתכונות שלה:
  - ממוצע ציוני התקן הוא 0.
  - סימטריה ביחס לממוצע.
  - השטח מתחת לעקומה המתוקננת (סטנדרטית) הוא 1.

שימוש בעקומה של התפלגות נורמלית

- הכרת הטבלה המלאה של התפלגות נורמלית סטנדרטית מצטברת.
- שימוש בטבלה:
  - למציאת הסתברויות של מאורעות.
  - למציאת ציון התקן המתאים להסתברות נתונה ולהיפך.
  - למציאת ממוצע ו/או סטיית התקן, כאשר נתונים ציוני התקן ו/או ההסתברויות המתאימות להם.
  - שימוש בנוסחה $p(z_1 < z < z_2) = p(z_2) - p(z_1)$
  - שימוש בתכונות של העקומה של ההתפלגות הנורמלית לחישוב הסתברויות תוך שימוש בנוסחאות:

$$p(z > z_x) = p(z < z_{-x}) \quad , \quad p(z > z_x) = 1 - p(z < z_x)$$

נספח – דוגמאות לפרק "התפלגות נורמלית"

<u>דוגמה 1</u> (ציוני התקן – הגדרה

באוכלוסייה מסוימת:

ציון התקן שמתאים לנתון 70 הוא Z_1.

ציון התקן שמתאים לנתון 74 הוא Z_2.

ידוע כי $Z_1 = 3 \cdot Z_2$.

חשבו את הממוצע.

<u>דוגמה 2</u> (ציוני תקן – הבנת המשמעות ושימוש בהם – כולל להשוואת קבוצות

לקראת בחינת הבגרות, בבית ספר "דקל" נערך מבחן מסכם. איילה ופנינה נבחנו במבחן.

ציון התקן של איילה היה 1.25 וציון התקן של פנינה היה 0.5- .

1. האם הציון של פנינה מעל/מתחת לממוצע?

הציון שקיבלה איילה במבחן היה 92 , הציון שקיבלה פנינה היה 64 .

2. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של ציוני כל התלמידים במבחן המסכם.

ידוע כי ציוני המבחן מתפלגים נורמלית.

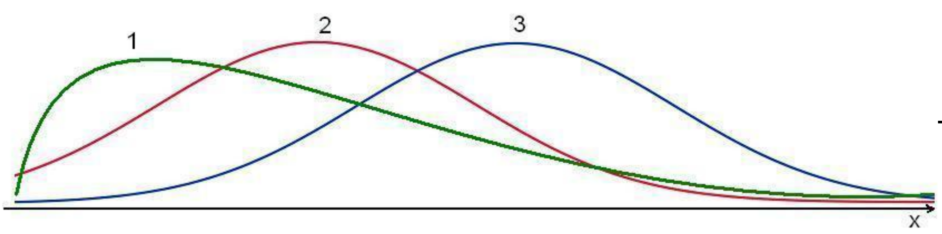
3. אריאל קיבל ציון 80 במבחן המסכם. האם מספר התלמידים שקיבלו ציון גבוה מהציון של אריאל שווה למספר התלמידים שקיבלו ציון נמוך מהציון של פנינה? הסבירו.
4. במבחן מועד ב פנינה קיבלה ציון 70.
ממוצע הציונים של המבחן במועד ב היה 80 עם סטיית תקן 10.
האם פנינה הצליחה במבחן מועד ב יותר או פחות לעומת המבחן הראשון בהשוואה לשאר התלמידים שנבחנו? הסבירו.

<u>דוגמה 3</u> (ייצוגים גרפיים של התפלגויות שונות

התפלגות הגבהים של בנים ושל בנות הינה נורמלית.

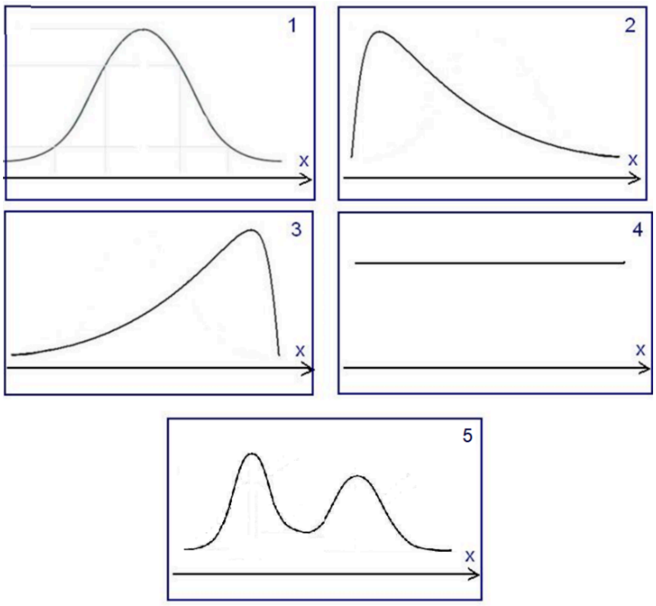
ממוצע הגבהים של הבנים גבוה מממוצע הגבהים של הבנות.

לפניכם שלושה גרפים של התפלגויות שונות. איזה גרף מתאר את התפלגות הגבהים של הבנים ואיזה גרף מתאר את התפלגות הגבהים של הבנות? הסבירו.



דוגמה 4 (ייצוגים גרפיים של התפלגויות שונות

מבחן מסכם של קורס א באוניברסיטה היה קשה מהרגיל. רוב הציונים במבחן היו נמוכים ומעט ציונים היו גבוהים. במבחן מסכם של קורס ב התפלגות הציונים הייתה נורמלית.

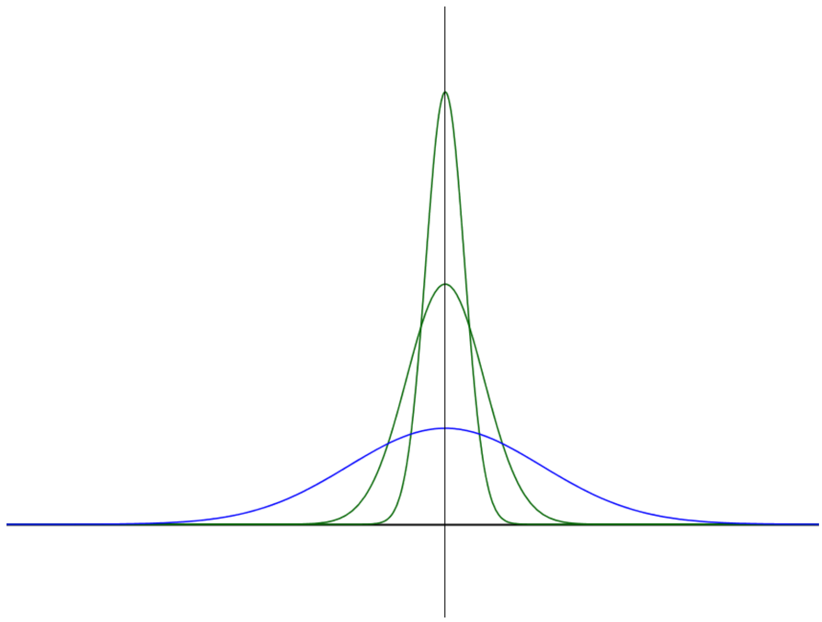


בכל הגרפים ציר ה- x מייצג את הציונים.

1. איזה מבין הגרפים יכול לתאר את ההתפלגות של ציוני המבחן המסכם של קורס א ואיזה מתאים לקורס ב?
2. קבעו, לגבי כל אחד מההיגדים הבאים, לאיזה מהגרפים שבסרטוט הוא מתאים, נמקו את קביעתכם.
   (1) רוב הציונים גבוהים, מעט ציונים נמוכים.
   (2) הרבה ציונים גבוהים, הרבה ציונים נמוכים, מעט ציוני ביניים.
3. איזה מבין ההיגדים הבאים מתאים לגרף 4? נמקו את קביעתכם.
   (1) כל התלמידים קיבלו אותו ציון במבחן.
   (2) לכל ציון יש אותו מספר תלמידים שקיבלו אותו.
4. בקורס שבו הציונים מתפלגים נורמלית ידוע שציון התקן המתאים ל-78 הוא 0.
   (1) מהו הממוצע של הציונים בקורס זה?
   (2) מהו החציון של הציונים בקורס זה?

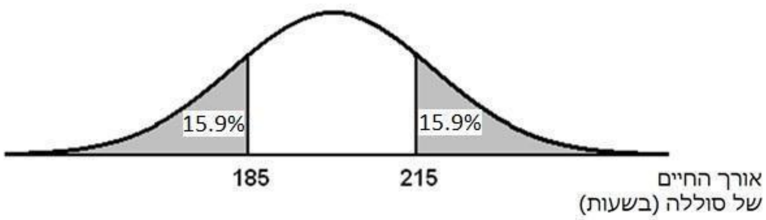
דוגמה 5 (השוואת אוכלוסיות המתפלגות נורמלית - על סמך פיזור הנתונים

נתונות שלוש עקומות של התפלגות נורמלית המתאימות לשלוש אוכלוסיות שונות.
השוו בין שלוש האוכלוסיות תוך התייחסות לממוצע ולסטיית התקן של כל אחת מהאוכלוסיות.



דוגמה 6 (שימוש בתכונות של עקומה נורמלית + שימוש בטבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית המצטברת

אורך החיים של סוללות מתפלג נורמלית. אורך החיים נמדד בשעות.
לפניכם גרף המתאר את ההתפלגות של אורך החיים של סוללה:



1. (1) מצאו את אורך החיים הממוצע של הסוללה.
   (2) מצאו את סטיית התקן.
2. 2% סוללות, שאורך החיים שלהן הוא הנמוך ביותר, נחשבות לפגומות.
   מצאו את אורך החיים של סוללה אשר מתחתיו היא נחשבת פגומה.
3. (1) איזה אחוז מהסוללות פועלות יותר מ- 222.5 שעות?
   (2) מפעל קנה 1,000 סוללות. כמה מהן עשויות לפעול למעלה מ- 222.5 שעות?

דוגמה 7 (שימוש דו-כיווני בטבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית המצטברת

בבית ספר גדול נערך סקר שבדק כמה זמן ביממה תלמידים גולשים באינטרנט.
נמצא כי פרקי הזמן ביממה, שבהם תלמידים גולשים באינטרנט, מתפלגים נורמלית וסטיית התקן היא 25 דקות.
נמצא גם כי 90% מהתלמידים גולשים באינטרנט פחות מ- 180 דקות ביממה.

1. כמה דקות ביממה בממוצע תלמידי בית הספר גולשים באינטרנט?
2. מהו אחוז התלמידים בבית הספר הגולשים באינטרנט פחות מ- 120 דקות ביממה?

דוגמה 8 (השוואת קבוצות + שימוש דו כיווני בטבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית המצטברת

הציונים במבחני הבגרות במתמטיקה (מועדי א ו- ב) מתפלגים נורמלית.
הציון הממוצע במועד א היה 76.6, וסטיית התקן הייתה 10.
הציון הממוצע במועד ב היה 80, וסטיית התקן הייתה 5.

1. רמי ניגש למבחן בשני המועדים, ובשניהם הוא קיבל ציון של 82.
באיזה מבחן הצליח רמי יותר בהשוואה לשאר הנבחנים? הסבירו.
2. יוסי ניגש למבחן בשני המועדים, ובשניהם הוא קיבל אותו ציון.
במועד א 77% מהנבחנים קיבלו ציון נמוך מהציון של יוסי.
מהו אחוז הנבחנים שבמועד ב קיבלו ציון נמוך מהציון של יוסי?

דוגמה 9 (שימוש דו-כיווני בטבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית המצטברת למציאת הסתברויות

הציונים במבחן כניסה לחוג מחשבים מתפלגים נורמלית.
הציון הממוצע במבחן הוא 53 וסטיית התקן היא 11.5.
מספר הנבחנים במבחן הוא 4,500.

1. כמה נבחנים (בערך) קיבלו ציון גבוה מ- 65?
2. רק 900 נבחנים התקבלו לחוג מחשבים. החל מאיזה ציון התקבלו הנבחנים?
(בתשובתכם דייקו עד ספרה אחת אחרי הנקודה העשרונית.)

דוגמה 10 (שילוב השימוש בטבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית המצטברת עם הסתברות של איחוד וחיתוך מאורעות

הציונים של קבוצת תלמידים במבחן מסוים מתפלגים נורמלית.
הציון הממוצע הוא 71, וסטיית התקן היא 15.
387 תלמידים קיבלו ציון בין 62 ל- 92.

1. כמה תלמידים ניגשו למבחן?
2. בוחרים באקראי תלמיד אחד. מהי ההסתברות שהתלמיד קיבל ציון גבוה מ- 92?
3. בוחרים באקראי שני תלמידים.
מהי ההסתברות שבדיוק אחד מהם קיבל ציון גבוה מ- 92?

דוגמה 11 (שימוש בתכונות עקומת ההתפלגות הנורמלית + שימוש בטבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית המצטברת

הציונים של הנבחנים בבחינת כניסה לאוניברסיטה מתפלגים נורמלית.
הציונים של 10% מהנבחנים גבוהים מ- 84, והציונים של 10% מהנבחנים נמוכים מ- 68.

1. סרטטו סקיצה של עקומת ההתפלגות הנורמלית וסמנו בה את הנתונים.
2. חשבו את ממוצע הציונים ואת סטיית התקן.
3. בשנה מסוימת ניגשו לבחינת הכניסה 2,000 נבחנים.
כמה נבחנים קיבלו ציון שנמצא בין סטיית תקן אחת מתחת לממוצע לבין סטיית תקן אחת מעל הממוצע?

דוגמה 12 (שילוב השימוש בטבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית המצטברת עם הסתברות של חיתוך מאורעות

במוסד מסוים נערכו שני מבחני קבלה, באנגלית ובמתמטיקה. ההסתברות להצליח במבחן אחד אינה תלויה בהסתברות להצליח במבחן האחר. הציונים בשני המבחנים התפלגו נורמלית.
ממוצע הציונים במבחן באנגלית היה 77 וסטיית התקן הייתה 20.
ממוצע הציונים במבחן במתמטיקה היה 81 וסטיית התקן הייתה 10.
הקבלה ללימודים מותנית בציון גבוה מ- 90 בכל אחד משני המבחנים.
מהי ההסתברות שתלמיד, שנבחר באקראי, התקבל ללימודים?

<u>דוגמה 13</u> (שילוב השימוש בטבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית המצטברת עם הסתברות של איחוד וחיתוך מאורעות

כדי להתקבל לאוניברסיטה, המועמדים נדרשים לעבור מבחן כניסה.

ציון מעבר במבחן הוא 75. השנה נערכו שני מבחני כניסה לאוניברסיטה.

80% מהמועדים נבחנו במבחן הראשון, ושאר המועמדים נבחנו במבחן השני.

התפלגות הציונים בשני המבחנים הייתה נורמלית.

במבחן הראשון היה הציון הממוצע 70, וסטיית התקן הייתה 10.

במבחן השני היה הציון הממוצע 79, וסטיית התקן הייתה 12.

1. בוחרים באקראי מועמד שנבחן במבחן הראשון.
   מהי ההסתברות שהוא עבר את המבחן?
2. בוחרים באקראי מועמד שנבחן במבחן השני.
   מהי ההסתברות שהוא עבר את המבחן?
3. בוחרים באקראי מועמד שנבחן באחד מהמבחנים.
   מהי ההסתברות שהוא עבר את המבחן?

הקשר בין שני משתנים כמותיים – ניבוי ורגרסיה לינארית (16 שעות)

בפרק זה נכיר כלי סטטיסטי חשוב העוסק בקשר בין שני משתנים. המודל הלינארי המאפשר ניבוי של ערך משתנה תלוי על פי ערך של משתנה בלתי תלוי נקרא רגרסיה לינארית. התיאור של הקשר בין שני המשתנים בעזרת הרגרסיה הלינארית היה הראשון שנחקר ביסודיות והחל להיות בשימוש נרחב ביישומים בתחומי דעת שונים, זאת בשל העובדה שהמודל הלינארי להערכת הקשר בין המשתנים הוא פשוט ושימושי.

מטרות על

1. הבנת המושג של קשר סטטיסטי בין שני משתנים כמותיים.
2. הבחנה בין קשר סיבתי לבין קשר סטטיסטי.
3. היכרות עם דיאגרמות פיזור עבור שני משתנים כמותיים והסקה על קיומו וכיוונו של הקשר.
4. היכרות עם טבלאות ערכים של שני משתנים וקביעה לגבי קיום קשר וכיוונו.
5. ניבוי ערכי משתנה אחד על פי ערכו של משתנה אחר (בסיוע של דיאגרמת פיזור):
    1. הבנת המושג ניבוי.
    2. היכרות עם ניבוי באמצעות גרף הממוצעים.
6. מקדם המתאם:
    1. הבנת המשמעות של מקדם המתאם כמדד לקשר ליניארי.
    2. היכרות עם התכונות של מקדם המתאם.
    3. חישוב מקדם המתאם.
7. ישר הרגרסיה:
    1. יכולת לזהות על פי דיאגרמת הפיזור אם ישר הרגרסיה יכול להועיל לניבוי.
    2. השימוש בישר הרגרסיה לצורך ניבוי, במקרים בהם קיים קשר ליניארי.
    3. הכרת הקשר בין מקדם המתאם לבין השיפוע של ישר הרגרסיה.
    4. מציאת ישר הרגרסיה.
8. הבנת המצבים בהם מודל הרגרסיה הלינארית עלול להוביל למסקנות שגויות.

תכנים

קשר סטטיסטי בין שני משתנים כמותיים

1. קריאת מידע מדיאגרמת פיזור נתונה.
2. בניית דיאגרמת פיזור (מומלץ להשתמש לשם כך בטכנולוגיה).
3. קביעה אם קיים קשר סטטיסטי בין שני המשתנים (ללא צורך בחישובים – רק על סמך הסתכלות על הנתונים המוצגים בצורה גרפית בדיאגרמת הפיזור או בטבלה).
4. קביעה של סוג הקשר (במידה וקיים): קשר חיובי או קשר שלילי, קשר מושלם או לא (ללא צורך בחישובים – רק על סמך הסתכלות על הנתונים המוצגים בצורה גרפית בדיאגרמת הפיזור או בטבלה).

גרף ממוצעים ושימושיו

1. בניית גרף הממוצעים: חלוקה של ציר המשתנה הבלתי תלוי לרצועות, ובכל רצועה – חישוב או מתן הממוצע של המשתנה התלוי.
2. שימוש בגרף הממוצעים: הממוצע המתקבל הוא ערך הניבוי של המשתנה התלוי עבור כל ערכי המשתנה הבלתי תלוי השייכים לרצועה זו.

מקדם המתאם הליניארי r

1. מושג מקדם המתאם הליניארי בין המשתנים.
2. מהנוסחה למקדם המתאם הליניארי ניתן לראות כי:
   i. הוא אינו משתנה תחת הוספת קבוע או שינוי היחידות של המשתנים. בפרט, מקדם המתאם הוא מספר טהור (ללא יחידות).
   ii. הוא סימטרי ביחס לשני המשתנים.
   iii. הוא תמיד בין $1-$ ל- 1.

3. משמעות מקדם המתאם r כמדד כמותי לקיום קשר לינארי:
   - משמעות סימן מקדם המתאם (קשר לינארי חיובי או שלילי).
   - קביעה אם קיים קשר לינארי לפי קרבת מקדם המתאם r ל- ± 1.
   - אם מקדם המתאם שווה ל- ± 1 אז הקשר הוא לינארי מושלם, כלומר, הנקודות $(x_1, y_1),...,(x_N, y_N)$ נמצאות על קו ישר אחד.
   - אם מקדם המתאם שווה ל- 0 אז אין קשר סטטיסטי לינארי בין המשתנים.

- קביעת עוצמת הקשר בין המשתנים:
  - $0.7 \le r < 1$ - קשר ליניארי חיובי חזק בין x ו- y.
  - $0.4 \le r < 0.7$ - קשר לינארי חיובי בינוני בין x ו- y.
  - $0 < r < 0.4$ - קשר ליניארי חיובי חלש בין x ו- y.

  באופן דומה לגבי קשר שלילי.

4. חישוב מקדם המתאם r על פי נתונים גולמיים:

$$r = \frac{1}{N \cdot s_x \cdot s_y}\left((x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \cdots + (x_N - \bar{x})(y_N - \bar{y})\right)$$

ועל פי נתונים מתוקננים:

$$r = \frac{1}{N}\left((z_x)_1(z_y)_1 + \cdots + (z_x)_N(z_y)_N\right)$$

(אם מספר הנתונים גדול, מומלץ להשתמש בטכנולוגיה).

ישר הרגרסיה

1. מושג ישר הרגרסיה ומטרת ישר הרגרסיה.
2. בניית משוואת ישר הרגרסיה לניבוי ערך המשתנה y.
3. בניית ישר הרגרסיה $y - \bar{y} = r\frac{S_Y}{S_X}(x - \bar{x})$ (מתוך הממוצעים וסטיות התקן של שני המשתנים ומקדם המתאם או על ידי שימוש בטכנולוגיה).
4. השפעת טרנספורמציות לינאריות במשתנה y על קו הרגרסיה ועל עוצמת הקשר.

הערות:

1. ניבוי בעזרת ישר הרגרסיה הוא בעל משמעות רק כאשר קיים קשר סטטיסטי לינארי בין שני המשתנים. במצבים בהם אין קשר סטטיסטי בין המשתנים או כאשר הקשר אינו לינארי אין משמעות מעשית לישר הרגרסיה.
2. על פי רוב הניבוי אינו מדויק כי הקשר הלינארי כמעט תמיד לא מושלם.
3. ישר הרגרסיה עובר דרך נקודת הממוצעים של שני המשתנים שהיא $(\overline{X}, \overline{Y})$.

נספח – דוגמאות

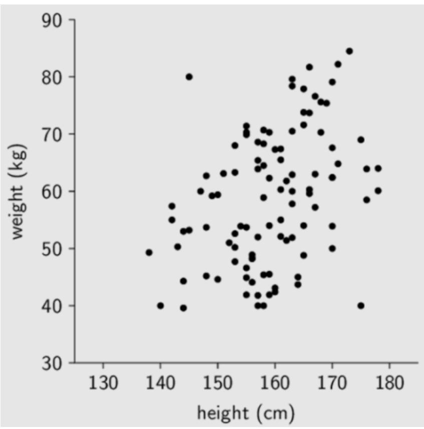
דוגמאות לקשר סטטיסטי בין שני משתנים כמותיים

<u>דוגמה</u>

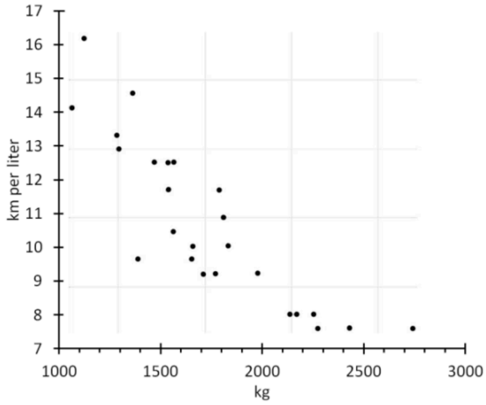
לפניכם מספר דיאגרמות פיזור. בכל אחת מהן, קבעו:

1. מהי האוכלוסייה?
2. מי הם המשתנים הכמותיים?
3. האם קיים קשר סטטיסטי בין שני המשתנים הכמותיים?
4. במידה וקיים קשר סטטיסטי, קבעו את סוג הקשר (חיובי או שלילי, מושלם או לא).

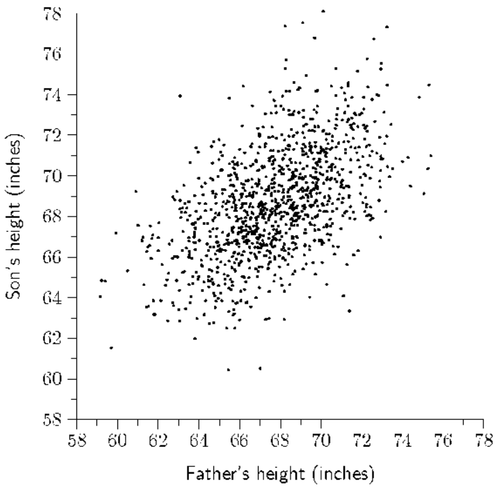
א. דיאגרמת פיזור של גובה ומשקל של מספר אנשים



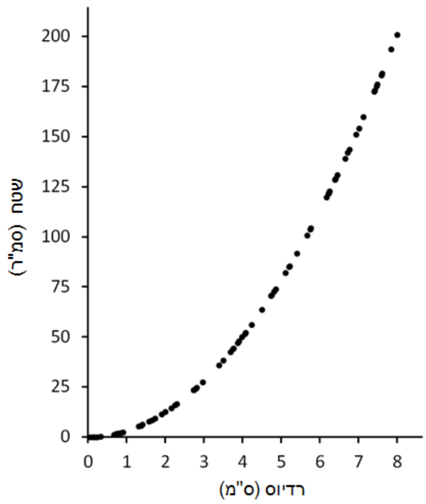
2. דיאגרמת פיזור של משקל וצריכת הדלק (בק"מ לליטר) עבור מספר רכבים



3. דיאגרמת פיזור של גובה האב וגובה הבן



4. דיאגרמת פיזור של הקשר בין רדיוס ושטח של מעגלים



(א' ו- ג' הן דוגמאות לקשר חיובי, ב' – דוגמה לקשר שלילי, ד' – קשר מושלם לא לינארי)

דוגמה

במחקר שנערך בקרב גברים בגילאי 18 – 54 נמצא מקדם מתאם חיובי בין לחץ הדם שלהם לבין רמת ההכנסה שלהם. מה ניתן להסיק מכך:

1. לשני גברים בגיל המדגם שנבחרו באקראי, סביר יותר כי לזה בעל לחץ הדם הגבוה יותר תהיה הכנסה גבוהה יותר.
2. ככל שרמת לחץ הדם עולה אז רמת ההכנסה יורדת.
3. אין קשר בין רמת לחץ הדם לבין רמת ההכנסה.

דוגמה

לפניכם נתונים עבור ערכי המשתנה הבלתי תלוי (x) וערכי המשתנה התלויy) (.

61	55	80	78	100	92	97	x
57	40	81	77	95	82	85	y

סרטטו את הנתונים במערכת צירים, וקבעו אם קיים קשר סטטיסטי בין שני המשתנים.

אם קיים קשר סטטיסטי, קבעו:

1. האם הקשר חיובי או שלילי?
2. האם הקשר מושלם או לא?

דוגמה

בכל אחד מהמקרים הבאים, זהו את האוכלוסייה ואת המשתנים, וציינו אם הייתם מצפים לראות קשר בין שני המשתנים. אם כן, ציינו אם הייתם מצפים לקבל קשר חיובי או שלילי, וציינו אם הוא מושלם.

1. כמות הדלק במיכל של מכונית מסוימת ומספר הק"מ שהיא נסעה מאז מילוי הדלק האחרון.
2. סכום כל המספרים שהוגרלו בלוטו במשך חודש ומספר הלידות בירושלים באותו חודש.
3. מספר גני הילדים בכל עיר בישראל והרווח השנתי מקנסות על דו"חות חניה באותה עיר.

4. שנת הלידה של תושבי חיפה והגיל שלהם בשנה הנוכחית.
5. הכנסה חודשית של משפחה וצריכת החשמל של אותה משפחה.
6. ציון במתמטיקה של תלמיד וציון בפיסיקה של אותו תלמיד.
7. מספר שנות הלימוד של אדם ושכרו של אותו האדם.
8. הגיל של אדם ומשקלו של אותו אדם.
9. זמן המתנה בתור לפקיד בבנק ומספר הפקידים באותו הבנק.
10. בזריקה חופשית של כדור, הזמן שעובר מרגע הזריקה וגובה הכדור מהקרקע.

דוגמה

בכל אחד מהמקרים הבאים התגלה קשר סטטיסטי חיובי. הציעו הסבר למקור הקשר.

1. הרווח היומי ממכירת גלידה בבריכות השחייה בישראל ומספר המגבות שאבדו בהן באותו יום.
2. מספר הקניונים בישראל בעשורים שונים ומהירות הגלישה הממוצעת באינטרנט בעולם.
3. מהירות הקריאה של תלמיד בבי"ס יסודי ומספר הנעל שלו.

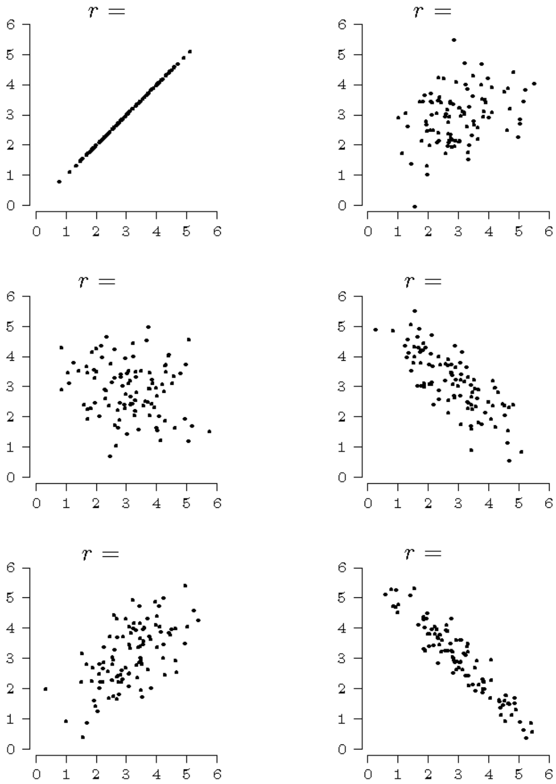
דוגמאות למקדם המתאם כמדד לעוצמת הקשר הלינארי

<u>דוגמה</u>

לפניכם דיאגרמות פיזור ורשימה של ערכי מקדמי המתאם שלהן:

-0.75   -0.93   0.27   -0.20   1.0   0.63

התאימו לכל דיאגרמה את מקדם המתאם שלה מהרשימה. הסבירו את בחירתכם.



<u>דוגמה</u>

לפניכם אוספים של נתונים. בכל אוסף, חשבו את מקדם המתאם ותארו את הנתונים בגרף.

א.

x	y
1	6
2	7
3	5
4	4
5	3
6	1
7	2

ב.

x	y
1	2
2	1
3	4
4	3
5	7
6	5
7	6

ג.

x	y
1	7
2	6
3	5
4	4
5	3
6	2
7	1

(א: $r = -0.93$ ב: $r = 0.82$ ג. $r = -1$)

<u>דוגמה</u>

בהינתן טבלת ערכים של הגובה והמשקל של מספר אנשים:

א. חשבו מהטבלה את הממוצע ואת סטיית התקן של כל אחד מהמשתנים.

ב. חשבו את מקדם המתאם.

דוגמה

רוצים לבדוק אם קיים קשר סטטיסטי בין מידת ההצלחה של תלמידים בבחינה מסכמת לבין ההשתתפות בשיעורי חזרה שנערכו לפני הבחינה.
לפניכם התוצאות, כאשר x מייצג את העובדה שהתלמיד כן / לא השתתף בשיעורי החזרה (0 = לא השתתף, 1 = השתתף), ו- y מייצג את הציון שקיבל התלמיד בבחינה מסכמת.

x	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
y	61	61	79	74	83	71	86	40	45	87	100	70	90	50	80

1. סרטטו את הנתונים.
2. חשבו את מקדם המתאם בין x ל- y.
3. האם קיים קשר לינארי בין שני המשתנים הללו? הסבירו.

דוגמה

מנהלת בית-ספר בדקה את הציונים של תלמידי כיתה מסוימת במבחן המסכם במתמטיקה ובמבחן מסכם בפיזיקה. היא מצאה שמקדם המתאם בין הציונים בשני המקצועות הוא 0.8.
כעבור מספר ימים החליטה המורה למתמטיקה להוריד 4% מהציון של כל תלמיד.
המורה לפיזיקה החליט להוריד 3% מהציון של כל תלמיד.
מה יהיה מקדם המתאם בין הציונים במתמטיקה ופיזיקה לאחר הורדת הציונים?

דוגמאות לניבוי ליניארי בעזרת ישר הרגרסיה

<u>דוגמה</u>

תלמידים נבחנו בשני מבחנים במתמטיקה. להלן התוצאות:

במבחן הראשון: $\bar{x}=70 \quad S_x = 5$,

במבחן השני: $\bar{y}=75 \quad S_y = 8$,

המתאם בין שני המבחנים הוא: $r = 0.7$

1. תלמיד קיבל במבחן הראשון ציון של 80. העריכו מה יהיה הציון של אותו תלמיד במבחן השני.
2. מהי משוואת קו הרגרסיה לניבוי של הציון במבחן השני על פי הציון במבחן הראשון?

(פתרון: שיפוע קו הרגרסיה: $\frac{r \cdot S_y}{S_x}=\frac{0.7 \cdot 8}{5}=1.12$. הישר עובר דרך הנקודה: $(\bar{x}, \bar{y})$ כלומר, דרך (70 , 75). נציב ערך זה במשוואת הישר ונקבל את המשוואה:

$y = 1.12x - 3.4$)

3. מהו הניבוי של הציון במבחן השני עבור תלמיד שקיבל 70 במבחן הראשון?

שאלות לדוגמה ממרכז המורים:

דוגמה:

בחברה גדולה ערכו סקר: רשמו את מספר הנדבקים בקורונה ביום ואת מספר העובדים מהבית בכל יום.

מסמנים ב- x את מספר הנדבקים היומי, וב- y את מספר העובדים מהבית בכל יום.

נמצא כי: $\bar{X} = 10$, $\bar{Y} = 25$, $r = 0.65$

$s_x = 1.2$, $s_y = 2.3$

א. מהי משוואת קו הרגרסיה?

ב. על-פי קו הרגרסיה, כמה עובדים יעבדו מהבית ביום שבו יהיו 15 נדבקים?

ג. מדוע, לדעתכם, $r \neq 1$?

ד. מוסיפים לסקר נתונים של 15 ימים נוספים.

בכל אחד מהימים הנוספים יש 10 נדבקים חדשים ו-25 עובדים מהבית.

מהי ההשפעה של הנתונים החדשים על כל אחד מהגדלים הבאים, נמקו תשובתכם:

(1) $\bar{X}$

(2) $\bar{Y}$

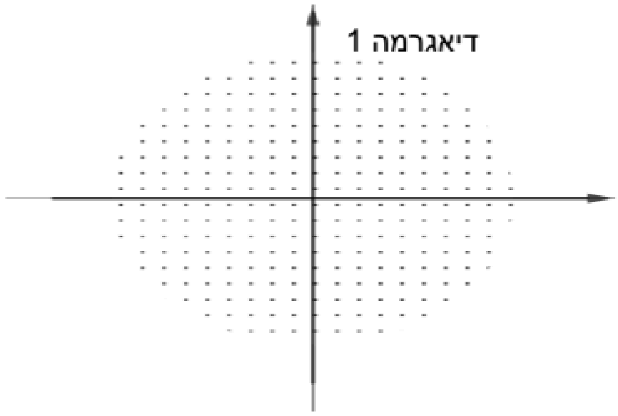
(3) s_x

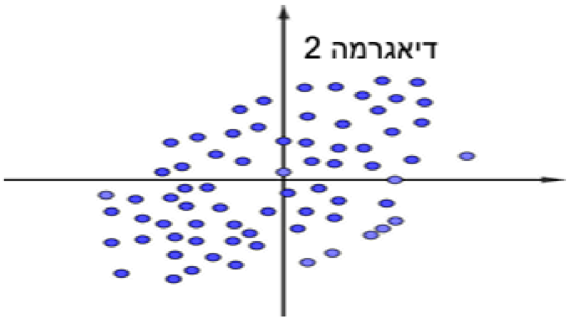
(4) s_y

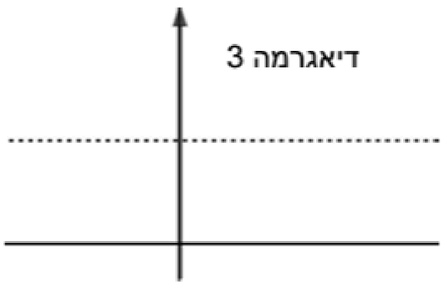
דוגמה:

לפניכם שלוש דיאגרמות פיזור.

באילו מדיאגרמות הפיזור הבאות מתקבל $r = 0$? הסבירו.







דוגמה:

שאלו בגן ילדים: כמה סוכריות ביום אוכל כל ילד או ילדה, וכמה ביגלה אוכל כל אחד מהם.

נסמן את מספר הסוכריות ב- x ואת מספר הביגלה נסמן ב- y.

התקבלו הנתונים הבאים:

y	x
6	1
5	2
4	3
3	4
2	5
1	6

א. סרטטו את הנתונים בדיאגרמת פיזור.

ב. חשבו את:

(1) $\bar{X}$	(2) $\bar{Y}$	(3) σ_x	(4) σ_y	(5) r

דוגמה:

בקרב 300 בני נוער, נבדק הקשר בין גיל לבין מספר הדקות המוקדשות לגלישה ברשתות חברתיות.

הגיל הממוצע של בני הנוער שהשתתפו בסקר: 15.4 שנים, סטיית התקן: 1.2

המספר הממוצע של דקות גלישה ברשתות חברתיות: 75, סטיית התקן: 24

נמצא: $r = 0.72$

א. מצאו את קו הרגרסיה לניבוי מספר דקות הגלישה ברשתות החברתיות על-פי גיל הנער או הנערה.

ב. על-פי קו הרגרסיה שמצאתם, מהו משך הזמן שמקדישה נערה בת 16 ו-3 חודשים לגלישה ברשתות החברתיות?

מוסיפים לסקר נתונים שמתייחסים לקבוצת גיל נוספת: 300 חיילים.

הגיל הממוצע של החיילים: 19.5.

המספר הממוצע של דקות גלישה ברשתות החברתיות: 30.

ג. מהם הערכים של ממוצע הגיל וממוצע דקות הגלישה בקבוצה הכוללת את 600 הנבדקים?

סטיות התקן בקבוצה הכוללת: סטיית התקן של הגיל: 1, סטיית התקן של דקות הגלישה: 18.

ידוע שקו הרגרסיה החדש הוא:

$$\hat{y}_x = \frac{7}{180}x + b$$

ד. (1) מצאו את הערך של b.

(2) מצאו את הערך של מקדם המתאם החדש.

(3) תארו והסבירו את השינוי במקדם המתאם.

שאלות לדוגמה ממבחני הבגרות:

דוגמה (471 קיץ תשפ"ג, מועד ב):

בעל חנות המוכר טאבלטים בדק את הקשר הלינארי בין גודל המסך של טאבלט באינצ'ים (המשתנה x) ובין מספר הדקות שנדרשו ללקוח להחליט לקנות את הטאבלט (המשתנה y).

ביום מסוים הוא מכר 8 דגמים שונים של טאבלטים.

לפניכם טבלה המתארת את הנתונים של שמונת הדגמים שהוא מכר באותו יום:

גודל המסך באינצ'ים (x)	מספר הדקות לקבלת ההחלטה לקנות את הטאבלט (y)
9	2
9	10
9	10
9	10
11	10
11	10
11	10
11	18

א. חשבו את הממוצעים ואת סטיות התקן של שני המשתנים, x ו־ y.

ב. חשבו את מקדם המתאם r.

ג. מצאו את משוואת ישר הרגרסיה לניבוי מספר הדקות לקבלת החלטה כתלות בגודל המסך.

בעל החנות הזמין לחנותו דגם חדש של טאבלט, שגודל המסך שלו 10 אינצ'ים.

ד. על פי ישר הרגרסיה שמצאתם, מהו הניבוי עבור מספר הדקות לקבלת ההחלטה בעבור דגם זה?

בעקבות העסקתו של מוכר חדש בחנות התקצר ב־ 20% זמן קבלת ההחלטה לקנות כל אחד מדגמי הטאבלטים.

ה. בעבור כל אחד מן המדדים שלפניכם קבעו אם ערכו יגדל, יקטן או לא ישתנה.

(1) מקדם המתאם r.

(2) סטיית התקן של המשתנה y.

(3) שיפוע קו הרגרסיה לניבוי זמן קבלת ההחלטה כתלות בגודל המסך.

דוגמה (472 קיץ תשפ"ג, מועד ב):

ברסיטה רצתה לבדוק אם היעדרות משיעורים בקורס שנתי (המשתנה x) קשורה לינארית לציון במבחן הסופי
).

ההיעדרות מן השיעורים היה $\bar{x} = 10$, הציון הממוצע היה $\bar{y} = 70$, ומקדם המתאם היה שלילי ($r < 0$).

ה את משוואת ישר הרגרסיה לניבוי y מ־ x .

ן המשוואות 1–4 שלפניכם היא המשוואה שמצאה המרצה. קבעו איזו מהן היא המשוואה, ונמקו את קביעתכם.

$y = 10x - 30$

$y = x + 60$

$y = -2x + 70$

$y = -2x + 90$

המרצה חישבה את סטיות התקן בעבור ההיעדרות מן השיעורים ובעבור הציונים במבחן הסופי, וקיבלה: $Sx = 4$, $Sy = 10$.

ב. חשבו את מקדם המתאם r .

ג. מהו מספר ההיעדרויות שישר הרגרסיה מנבא בעבורו ציון 80 ?

דוד, מרצה אחר, רצה לערוך את אותה בדיקה בנוגע לתלמידיו. הוא מצא את משוואת ישר הרגרסיה לניבוי y מ־ x , וגילה כי בעבור כל מספר של היעדרויות – הישר מנבא תמיד את הציון 65 .

ד. מצאו את ערכו של כל אחד מן המדדים שבתת־סעיפים (1)–(2) בעבור התלמידים של דוד:

(1) שיפוע ישר הרגרסיה.

(2) הציון הממוצע ($\bar{y}$).

ה. על פי הנתונים שבשאלה, האם אפשר למצוא את הממוצע של היעדרויות התלמידים של דוד? נמקו את תשובתכם.

דוגמה (471 קיץ תשפ"ג):

חוקרים בדקו את הקשר בין משקל של עכבר (Y בגרמים) ובין משקל מנת המזון היומית שלו (X בגרמים).

הם בדקו עשרה עכברים. משקלי העכברים ומשקל מנת המזון היומית של כל אחד מהם מוצגים בטבלה שלפניכם.

משקל מנת המזון היומית (X בגרמים)	1	2	3	3	3	4	4	4	5	5
משקל העכבר (Y בגרמים)	12	13	14	15	16	20	22	24	28	30

נתון כי המשקל הממוצע של מנת המזון היומית הוא 3.4 גרמים.

א. הראו כי סטיית התקן של משקל מנת המזון היומית היא 1.2 גרמים.

נתון כי המשקל הממוצע של עשרת העכברים הוא 19.4 גרמים, וסטיית התקן של משקלם היא 6.086 גרמים.

ב. לפניכם 4 מספרים שונים: 0, -0.123, 0.923, 1. אחד מן המספרים הוא מקדם המתאם r בין משקל העכבר ובין משקל מנת המזון היומית שלו.

בחרו איזה מהם הוא מקדם המתאם, ונמקו את בחירתכם (אין צורך לחשב).

ג. מצאו את משוואת ישר הרגרסיה לניבוי משקל העכברים מתוך משקל מנת המזון היומית שלהם.

לאחר זמן מה התגלה כי המאזניים שבהם נשקלו העכברים לא היו מכוילים ויש להפחית 2 גרמים ממשקלו של כל עכבר (המאזניים שבהם נשקלה מנת המזון היומית היו מכוילים).

ד. מה תהיה משוואת ישר הרגרסיה החדש לאחר הכנסת התיקון במשקלי העכברים?

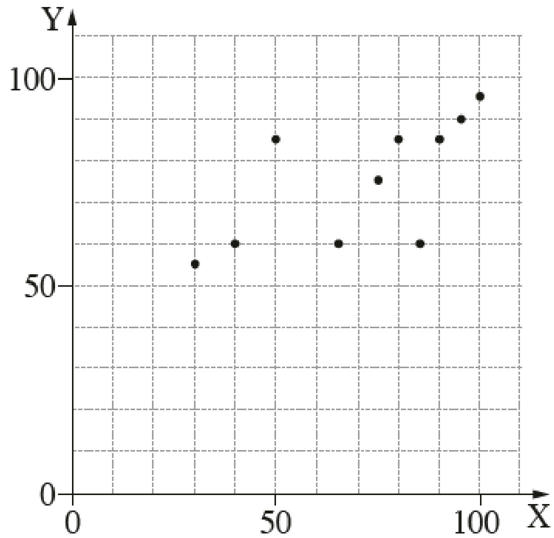
ה. על פי ישר הרגרסיה שמצאתם בסעיף ד, מהו הניבוי למשקל עכבר שמשקל מנת המזון היומית שלו הוא 3.5 גרם?

דוגמה (472 קיץ תשפ"ג):

תלמידי כיתה י"ב התבקשו לכתוב עבודה ולהגישה. הציון שקיבלו על העבודה שוקלל בציון הסופי של כל תלמיד.

המורה רצתה לבדוק את הקשר בין הציון על העבודה ובין הציון הסופי, ולשם כך סרטטה את דיאגרמת הפיזור של שני הציונים:

X – הציון על העבודה, Y – הציון הסופי. הדיאגרמה שהתקבלה מתוארת בתרשים שלפניכם.



א. האם אפשר להסיק מן הדיאגרמה הנתונה שכל תלמיד שקיבל על העבודה ציון גבוה יותר מתלמיד אחר קיבל **בהכרח** ציון סופי גבוה יותר מן התלמיד האחר? נמקו.

ב. אחד מן המספרים שלפניכם הוא מקדם המתאם המתאים לקשר בין שני המשתנים.

קבעו מיהו מבין המספרים האלה: 0.675 , 0 , 0.999 , -0.8 , 1.6 .

נתונים הממוצעים וסטיות התקן של שני המשתנים: $\overline{X}=71$, $S_X=23$, $\overline{Y}=75$, $S_Y=14$.

ג. מצאו את משוואת ישר הרגרסיה לניבוי הציון הסופי על פי הציון על העבודה.

הוחלט להעלות את הציון הסופי של כל תלמיד ב־ 5 נקודות, ובעקבות העלאה זו התקבל ישר רגרסיה חדש.

ד. **(1)** האם השתנתה סטיית התקן S_Y לאחר העלאת הציונים?

(2) אחד מן הגרפים I–III שבסוף השאלה מייצג את הישר הישן, שלפני העלאת הציון הסופי (מסורטט בקו מלא), ואת הישר החדש, שאחרי ההעלאה (מסורטט בקו מקווקו).

קבעו מיהו הגרף, ונמקו.

ה. אם קיים בכיתה תלמיד שהציון שלו על העבודה הוא 71 , מה צריך להיות הציון הסופי שלו (לאחר ההעלאה בציון) כדי שהנקודה המייצגת את שני הציונים שלו תהיה על ישר הרגרסיה החדש?