תוכנית כיתה י"א – חמש יח"ל

סדר ושעות הלימוד המוצעים:

כיתה י"א			
נושאI	שעות	נושאII	שעות
אינדוקציה מתמטית וסדרות סדרות כלליות, חשבוניות והנדסיות, אינדוקציה מתמטית ושימושיה בתחומי שונים כולל שימושיה באפיון סדרות כלליות	40	חשבון דיפרנציאלי: השתנות קצב השינוי חזרה והעמקה לגבי משפחות פונקציות שנלמדו בכתה י	30
זהויות טריגונומטריות ויישומן בבעיות בגאומטריה	15	חשבון אינטגרלי	25
הסתברות	25	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות	15
	80		70
סה"כ 150 שעות			

תוכן

מבוא

בכיתה י״א יילמדו ארבעה נושאים עיקריים: אנליזה (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי), טריגונומטריה במישור, הסתברות, שיטת ההוכחה באינדוקציה ושימושיה וסדרות.

להלן פירוט התכנים והדגשים בכל אחד מנושאים אלו.

ברוח התוכנית, התווספו לכל הנושאים הקשרים יישומיים, התווספה קישוריות ואיחוד של נושאי הלימוד השונים, והושמטו מספר נושאים שנלמדו בעבר (בפרט, הושמטו בעיות מילוליות כשאלה עצמאית).

בכיתה י״א יש התייחסות ליישומים של המתמטיקה בכל תחומי הלימוד, כפי שהם באים לידי ביטוי במדעים השונים ובחיי יום-יום, תוך מטרה להדגיש את רלוונטיות היישומים של המתמטיקה הנלמדת לנושאים עכשוויים. השאלות היישומיות נכתבו בצורה אוריינית כך שגוף השאלות מסביר את רלוונטיות המתמטיקה הנלמדת מחד ומרחיב את ההשכלה הכללית של התלמידים בתחום היישומי מאידך[1].

בנספח 1 מתוארים בקצרה היבטים מרכזיים הקשורים להוכחות ואופן ביטויים לאורך התוכנית.

בנספח 2 מוצגות מספר דוגמאות להמחשת סוג השאלות שאנו מציעים לכלול בכל פרק. לאור החידוש באופן הצגת פרק האינטגרלים כללנו בפרק זה הצעה לרצף ההוראה בנושא האינטגרל כפונקציית הצטברות.

מוצע כי הטמעת נושא היישומים תעשה בהדרגה, ותעודכן בספרי הלימוד ובמשרד החינוך לאורך השנים.

התוכנית כוללת שימוש בטכנולוגיה לשם חקר והמחשת התכנים. השימוש בטכנולוגיה מאפשר ומזמין לדון בשאלות בהקשר רחב ובאופן איכותני ולכן מהווה דרך להדגים את הפוטנציאל לעושר מחשבתי בהקשר המתמטי.

כהעשרה מתמטית, תרבותית ומדעית, כדאי להפנות את התלמידים לקריאה על דמויות מרכזיות בפיתוח המתמטיקה הנלמדת, על התחומים שפיתחו ועל חשיבותם.

נזכיר כי נושאים ודוגמאות המוגדרים **כהעשרה (ומסומנים באפור)** לא ייכללו כנושאי חובה בתוכנית (בשל קוצר זמן ו/או אופיים המתקדם או אופיים הטכני)[2], אך המורים אמורים להכירם, לאפשר לתלמידים להתבסס בעבודות ובבחינות על עקרונות ושיטות המופיעים בהם, ולהפנות את התלמידים המתעניינים בהם לקריאה נוספת בספרי הלימוד ובמרשתת (עם הרחבה אפשרית נוספת לתלמידים מצטיינים).

---

[1] בשאלות היישומיות יש לשים לב כי הייצוג ביחידות שונות (למשל יחידות אורך לעומת יחידות מהירות) ייעשה בצורה נכונה – הצירים בגרפים צריכים לכלול את היחידות של המשתנים/הפונקציות. בספרי הלימוד יש להוסיף דוגמאות מסוג זה עם פתרונות בהם היחידות כלולות ודוגמאות בהם שינוי היחידות במהלך/סוף התרגיל מניב תמיד אותה תוצאה. יש לשים לב שבשאלות היישומיות לא נכון להציג פונקציה ונגזרות שלה על אותו הגרף – שכן היחידות שלהן – שונות. אם דרושים שני הגרפים, אפשר ורצוי לשים את גרף הנגזרת ישר מתחת לגרף הפונקציה.

[2] התלמידים יהיו רשאים להסתמך על שלמדו במסגרת נושאי ההעשרה.

אינדוקציה מתמטית וסדרות (40 שעות לימוד)

נפתח פרק זה בדיון על סדרות מספריות עם חוקיות מוגדרת, סדרה חשבונית וסדרה הנדסית, לאחר מכן נדון באינדוקציה המתמטית ככלי להוכחת טענות בהן יש משתנה טבעי ככלל ובסדרות כלליות בפרט.

סדרה חשבונית וסדרה הנדסית (25 שעות לימוד)

מטרות-העל של פרק זה הן:

- פיתוח מושגי יסוד מתמטיים: פונקציות של משתנה בדיד ותכונותיהן (פונקציות עולות, יורדות, חיוביות/שליליות/עם סימן מתחלף וכדי).
- דיון במושג ההוכחה: טענות, דוגמאות, הוכחות והפרכת טענה בעזרת דוגמה נגדית, שימוש באלגברה להוכחות ודיון נוסף בנושא הגבול.
- הצגת נושא הסדרות ככלי שימושי לתיאור בעיות מהחיים.
- פיתוח מיומנויות מתמטיות: שימוש בכללי חזקות, אי-שוויון, ניתוח תכונות של סדרות חשבוניות והנדסיות.

1. מבוא לסדרות

תכנים

הפרק יעסוק רק בסדרות מספריות עם חוקיות. סדרות יוצגו בשתי דרכים: האחת, כפונקציות המוגדרות על משתנה בדיד (מוגדרות על המספרים הטבעיים אל המספרים הממשיים, פונקציות שנידונו גם בחט"ב); השנייה, על ידי כלל נסיגה המתאר איך סדרה משתנה עם האינדקס-המספר. סדרות תוצגנה תוך שימוש ברב-ייצוג: ייצוג מילולי של סדרות, ייצוג סימבולי על ידי נוסחה לפי מקום או נוסחת נסיגה, ייצוג גרפי וייצוג על ידי טבלת ערכים. הסדרה יכולה להיות עולה, יורדת, מחזורית או אף אחת מאלו. היא יכולה להיות חיובית/ שלילית או עם סימן מתחלף. קצב הגידול או הדעיכה של הסדרה מעניין בשימושים רבים.

דגשים

- הקשר לפונקציה – לכל מספר טבעי n מתאים בדיוק ערך אחד, ערך האיבר המתאים בסדרה.
- האינדקס n מיוצג על ידי מספר טבעי שמוֹרֶה על מקום האיבר בסדרה (למרות שסדרת האינדקסים יכולה להיות כל סדרה של שלמים עוקבים, גם שליליים, בפרק זה יידונו רק סדרות שבהן האינדקס הוא מספר טבעי).
- לעומת האינדקס ערכי הסדרה מקבלים ערכים לאו דווקא טבעיים (למשל ממשיים).
- זיהוי החוקיות וניסוחה באופנים שונים (מספרי, מילולי, סימבולי, גרפי).
- מומלץ להשתמש בטכנולוגיה כדי להציג סדרות באופן מספרי וגרפי, ולחקור באופן דינאמי את השפעת הפרמטרים של הסדרה עליה

2. סדרה חשבונית

תכנים

הגדרה לפי מקום (כפונקציה) והגדרה לפי נוסחת נסיגה. מעבר מכלל לפי מקום לכלל נסיגה ולהיפך.

- כתיבה פורמלית של איבר כללי כפונקציה של מקום לדוגמה $a(n)=a_n=3-2n$.
- הוכחת הנוסחה של סדרת הסכומים החלקיים (בכמה דרכים).
- הצגה גרפית של הסדרה כנקודות על גרף של פונקציה לינארית.
- הצגה גרפית של סדרת הסכומים החלקיים של סדרה חשבונית כנקודות על גרף של פונקציה ריבועית.
- זיהוי סדרות חשבוניות ופתרון בעיות פשוטות מבחינה אלגברית (שתי משוואות, רק אחת מהן יכולה להיות ריבועית).
- זיהוי פעולות פשוטות על איברי הסדרה שמשמרות את תכונות הסדרה החשבונית. יכולת לבדוק מהו הייצוג הגרפי של הפעולות הפשוטות הללו תוך קישור לנושא טרנספורמציות על פונקציות שנלמדו בחטה״ב (ולהיפך, זיהוי פעולות פשוטות על הסדרה החשבונית שמקלקלות את תכונותיה והופכות אותה לסדרה שאיננה סדרה חשבונית). פתרון בעיות אורייניות בנושא סדרות חשבוניות.
- התבוננות על הסדרה בדילוגים של מקום אחד (סדרות חלקיות במקומות הזוגיים או האי-זוגיים).
- **סדרות כלליות שיש בהן תת סדרות חשבוניות.**

דגשים

- ההפרש הקבוע בין איברים סמוכים מוביל לגרף נקודות לינארי.
- כל איבר הוא ממוצע חשבוני של שני האיברים הצמודים משני צדדיו (מכאן השם ״סדרה חשבונית״).
- יישום חשיבה מן הפרט אל הכלל: מתוך התבוננות באוסף מספרים מסיקים כלל נסיגה וכלל לאיבר כללי של סדרה (נוסחה לפי מקום).
- דיון בתפקיד ההוכחה (למשל, להבדיל מבדיקה במחשבון) וביכולת להפריך טענה בעזרת דוגמה נגדית אחת. אם מצאנו מקרה אחד שבו ההפרש בין שני זוגות איברים עוקבים בסדרה אינו זהה, הוכחנו שזוהי אינה סדרה חשבונית.
- גמישות בשימוש בייצוג סימבולי. למשל, שימוש בסימונים שונים a_n a_j : c_k

3. סדרה הנדסית

תכנים

- הגדרה לפי מקום (כפונקציה) והגדרה לפי נוסחת נסיגה. מעבר מכלל לפי מקום לכלל נסיגה ולהיפך. הרחבה של נושא החזקות: חוקי החזקות. חזקה עם מעריך שלם חיובי וחזקה עם מעריך שלם שלילי.
- ייצוג גרפי של סדרות הנדסיות מסוגים שונים (עולה, יורדת, סימנים מתחלפים). התייחסות לסדרה הנדסית כפונקציה והסתכלות על קצב השינוי של סדרה הנדסית בהשוואה לסדרה חשבונית.
- זיהוי סדרות הנדסיות ועיסוק בבעיות שפתרונן מצריך שליטה בטכניקה אלגברית של חזקות, כולל פתרון משוואות מעריכיות על ידי ניסוי וטעייה במספרים טבעיים קטנים.
- דוגמאות ספציפיות של פעולות על איברי הסדרה שמשמרות את תכונות הסדרה ההנדסית (ולהיפך, זיהוי פעולות פשוטות על הסדרה שמקלקלות את תכונותיה והופכות אותה לסדרה שאיננה סדרה הנדסית). הכרת ההשפעה של הפעולות הנ"ל על הייצוג הגרפי של הסדרות
- אפיון סדרת הסכומים החלקיים. סכום של אינסוף איברים כאשר הסכום ההנדסי מתכנס תוך דיון נוסף בנושא הגבול. הצגת הייצוג העשרוני של מספרים רציונליים מסוימים כסכום אינסופי של סדרה הנדסית.
- במסגרת פרק זה יינתנו בעיות יישומיות כגון הצגת ספירה בינארית, ריבית בנקאית ובעיות גדילה ודעיכה דיסקרטית של אוכלוסיות. שימוש במחשבונים, אקסל ואמצעים טכנולוגיים להדגמת התכנסות הסדרה וסיכומה.
- **סדרות כלליות שיש בהן תת סדרות הנדסיות.**

דגשים

- דיוק מילולי בנושא גבולות: שאיפה לאפס של האיבר הכללי של סדרה הנדסית עם מנה שערכה המוחלט קטן מאחד. התכנסות סדרת הסכומים החלקיים במקרה זה.
- גדילה של סדרה הנדסית בהשוואה לסדרה חשבונית וחשיבות הנושא בחיי היום-יום.
- חיזוק מושג ההוכחות הכלליות מחד והדוגמאות הנגדיות להפרכת טענות מאידך.

הערות

1. חישובי הגבול יילמדו על ידי פיתוח האינטואיציה באמצעות דוגמאות וחישובים תוך שימוש בשפה מדויקת; מחד, ניתן לראות שהאיברים בסדרה הנדסית עם מנה קטנה מאחד, הולכים וקטנים על ידי חישוב פשוט. מאידך, יש להדגיש שכדי להוכיח שהגבול של האיבר הכללי בסדרה הנדסית עם מנה קטנה בערכה המוחלט מאחד הוא אפס, נדגיש ש**לכל** מספר שנבחר, קטן כרצוננו, **ניתן למצוא n** כך שכל האיברים הבאים בסדרה (a_j עבור $j>n$) יהיו קטנים מהמספר הקטן שבחרנו.

2. מציאת המקום בפתרון משוואות מעריכיות או אי שוויונות ייעשה על ידי ניסוי וטעייה.
בשלב זה אין הכוונה לפתרון משוואות מעריכיות בעזרת פונקציה לוגריתמית.

אינדוקציה מתמטית ושימושיה (15 שעות לימוד)

מבוא

האינדוקציה מהווה שיטת הוכחה בסיסית במתמטיקה, וההוראה שלה חשובה הן לפיתוח חשיבה אינדוקטיבית מן הפרט אל הכלל, הן כשיטה מסודרת להוכחת טענות בעלות משתנה שערכיו מספרים טבעיים, והן כבסיס לפעולות רקורסיביות שעליהן מבוססים אלגוריתמים חישוביים. בפרק זה נעסוק בלימוד שיטת ההוכחה באינדוקציה ובביסוס הלוגיקה שלה, תוך הדגמתה בשימושים פשוטים - בעיות וויזואליות, גאומטריות ובבעיות שניתן לנסחן באמצעות סדרות (תוך הקפדה על רמת סיבוכיות נמוכה).

הוראת נושא האינדוקציה המתמטית משתלבת בתוכנית הלימודים בשלב בו התלמידים למדו את שיטת ההוכחה הישירה ושיטת ההוכחה על דרך השלילה. הם יודעים להגדיר סדרה כפונקציה שמוגדרת על המספרים הטבעיים וכמו כן הם בקיאים בתכונותיהן של סדרות חשבוניות והנדסיות ובפתרון בעיות הקשורות בהן.

עם לימוד הפרק, ההוכחה באינדוקציה הופכת לחלק מארגז הכלים של התלמידים. מעתה ייעשה שימוש בהוכחה זו כל אימת שיעלה הצורך לכך (לדוגמא, הוכחת משפט דה-מואבר בפרק על מספרים מרוכבים). אפשר כמובן לחזור ולהוכיח באמצעות אינדוקציה נושאים שנלמדו בעבר כדוגמת גזירה של פונקציות חזקה כאשר יודעים לגזור מכפלה).

תכנים

1. <u>מבוא כללי -</u> הצגת האינדוקציה בהקשר הרחב של שיטות ההוכחה דדוקטיביות במתימטיקה. נזכור כי עד לשלב זה הוצגו שני סוגים של הוכחות דדוקטיביות: הוכחה ישירה (שרשרת היסקית) והוכחה על דרך השלילה.

- הוכחה באינדוקציה – מתאימה להוכחת טענה לגבי מספר אינסופי של מקרים שאותם ניתן למנות. כך, בכדי להוכיח שטענה כלשהי מתקיימת לכל מספר טבעי נשתמש בעיקרון האינדוקציה על פיו עלינו להוכיח שמתקיימות שתי הדרישות הבאות:
  - המספר 1 מקיים את הטענה (שלב הבסיס)
  - אם מספר טבעי כלשהו מקיים את הטענה אז גם המספר העוקב לו מקיים את הטענה. (שלב הצעד)

עיקרון האינדוקציה קובע כי מקיומן של שתי דרישות אלה נובע שהטענה מתקיימת לכל מספר טבעי.

נדגיש כי יש לעודד הוכחה בדרכים שונות והאינדוקציה היא אחת מהן. לדוגמא, אפשר להוכיח כי הביטוי n^3-n מתחלק ב- 6 לכל n טבעי בשתי דרכים כדי להתנסות באופן בסיסי בשימוש בשפת האינדוקציה המתמטית ובאלגנטיות שבשיטתיות שלה.

נתחיל את פרק האינדוקציה בדוגמאות עם ייצוג ויזואלי שבהם מבנה ההוכחה באינדוקציה טבעי ואינו מחייב שימוש במניפולציות אלגבריות. בנוסף, נוכל לחזור לדוגמאות מכוננות אלו כאשר תתעורנה שאלות לגבי נחיצות הצעדים השונים במבנה ההוכחה האינדוקטיבית.

2. אינדוקציה מתמטית – עקרונות ודוגמאות

- הוכחה באינדוקציה של טענות שמיוצגות באופן ויזואלי.
- הוכחת טענות כלליות על קבוצת המספרים הטבעיים (מקרים פשוטים של בעיות התחלקות וסכומים אינסופיים בלבד)
- זיהוי הוכחות אינדוקטיביות תקינות וזיהוי מהלכים שגויים שלא מהווים הוכחה.

3. שימוש באינדוקציה בחקירת סדרות חשבוניות, הנדסיות ואחרות

- הכרות עם סדרות כלליות
  - הגדרת סדרה באמצעות **פונקציה** שמוגדרת על הטבעיים (הגדרה לפי מקום) - נשתמש לעיתים בסימון $a(n)$ כסימון שקול לסימון a_n כך נקשר את תכונות הסדרות לתכונות של פונקציות, כגון מונוטוניות.
  - הגדרת סדרה על ידי **כלל נסיגה** – תנאי התחלה והאופן בו מחשבים כל איבר באמצעות קודמו מספיקים על מנת להגדיר סדרה. הגדרה זו מהווה מבוא לחשיבה רקורסיבית. ניתן להדגים זאת על ידי השימוש בפרוצדורות רקורסיביות באמצעות כלים טכנולוגיים, למשל חישוב $n!$ או x^n בגיליון אלקטרוני.
- שימוש באינדוקציה כדי להוכיח את התכונות לגבי סדרות חשבוניות והנדסיות (שקילות כלל הנסיגה והגדרת הסדרה לפי מקום, נוסחאות הסכומים).
- שימוש באינדוקציה להוכחת שקילות של הצגות שונות של סדרות ונוסחאות לסכומי סדרות, במקרים בהם האיבר הראשון קבוע, והסידרה מוגדרת כך שכאשר n גדל ב- 1 נוסף לסידרה בדיוק איבר אחד.

יש לעמוד על היכולת לעבור מהגדרה לפי מקום להגדרה באמצעות נוסחת נסיגה ולעומת זאת על הקושי העקרוני במעבר בכוון ההפוך (בכל מקרה **אין** דרישה למעבר בין כלל נסיגה נתון לנוסחה לפי מקום, למעט סדרות חשבוניות והנדסיות).

דגשים

דגשים בנושא אינדוקציה מתמטית:

- הבחנה בין הוכחה באינדוקציה לבין הסקה מדוגמאות אמפיריות.
- הוכחות באינדוקציה מתאימות להוכחת טענות **שיש בהן משתנה שהוא מספר טבעי**.
- בהוכחה באינדוקציה לבדיקת המקרה הפרטי (שלב הבסיס) יש תפקיד ייחודי (לעומת בדיקת מקרים פרטיים בבעיות חקר) **והוא מהווה חלק מהותי מההוכחה השלמה**. לעומת זאת, כאשר

בוחנים מקרים פרטיים בפעולות חקר, הבדיקה נועדת כדי לתמוך בהשערה, להבין טוב יותר את הטענה, לתת מוטיבציה להוכחה או להפריך אותה.

- שני שלבי האינדוקציה (שלב הבסיס, ושלב הצעד) אינם תלויים זה בזה. כדי להמחיש זאת חשוב להציג טענות שבהן הטענה נכונה עבור n=1 (או עבור n מסוים אחר) אך אינה נכונה לכל n, וטענות שבהן ניתן להוכיח את שלב הצעד, אך לא את שלב הבסיס ולכן הטענות אינן נכונות לכל n. ראו דוגמאות.

- הבחנה בין הטענה הכללית אותה אנחנו מוכיחים "לכל n ..."، לבין ההנחה שמניחים בשלב הצעד "הטענה נכונה עבור k מסוים כלשהו" כחלק משלב הצעד. הבנה שלמרות הדמיון החיצוני ביניהן, אלו טענות שונות.

- ההנחה היא רק חלק משלב הצעד.

- אין צורך לדעת אם הטענה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו כדי להוכיח שאם הטענה נכונה עבור n כלשהו אז היא נכונה גם עבור המספר הטבעי העוקב. (לשם כך כדאי להתנסות בפעילויות חקר שבהן מוכיחים השערות מסוג "אם A אז B" מבלי לדעת עדין אם A מתקיים. כלומר, יש להדגיש את ההבדל בין השימוש בשפה המתמטית ב"הנחה" ככלי עבודה לבין שפת היום-יום בה אנחנו מניחים, בדרך כלל, רק דברים שאנחנו משוכנעים שהם נכונים).

- הדגשים שצוינו לעיל צריכים לבוא לידי ביטוי במבנה ההוכחה בדרך האינדוקציה. כלומר, בכל הוכחה חייב להיות מצויין בצורה ברורה שלב הבסיס, שלב הצעד ושלב ההסקה.

דגשים בנושא סדרות כלליות:

- טענת שקילות בין הגדרת סדרה לפי מקום ובין הגדרתה באמצעות כלל נסיגה כמוטיבציה לדיון בהוכחה באינדוקציה

- הגדרה באמצעות כלל נסיגה היא בעצם כלל רקורסיה לפעולה מסוימת, בדיוק כפי שנלמד במקצוע מדעי המחשב. ההוכחה כי כלל רקורסיבי מסוים שקול לנוסחה על פי מקום מאפשר חישוב נוח ויעיל של נוסחאות מסובכות באמצעים טכנולוגיים.

- קיים קושי עקרוני במציאת הגדרה לפי מקום עבור סדרה שמוגדרת באמצעות כלל נסיגה – לא תמיד ניתן לעשות זאת – ולכן מעבר זה לא נדרש פרט למקרים של סידרה חשבונית והנדסית.

אנליזה

פרק האנליזה כולל את פרקי החשבון הדיפרנציאלי ואת נושא פונקציית ההצטברות (אינטגרל).

חשבון דיפרנציאלי (30 שעות)

מבוא

בכיתה יוד נערכה היכרות עם משפחות של פונקציות ופעולות על פונקציות והונחו היסודות לחשבון הדיפרנציאלי.

בכתה י״א נרחיב ונעמיק בחשבון הדיפרנציאלי בשני מובנים :

- היכרות עם מושגים חדשים המאפשרים חקר תכונות חדשות של פונקציות : השתנות קצב השינוי ומושגים כמו קעירות ונגזרת שנייה, התנהגות הפונקציה בסביבת נקודות אי הגדרה ובקצות תחום ההגדרה של הפונקציה ומושגים כמו אסימפטוטות ונקודת אי רציפות סליקה.
- העמקה בחקר תכונותיהן של פונקציות רציונליות ופונקציות עם שורשים ריבועיים. במהלך החקר של כל משפחת פונקציות ישולבו התכנים והכלים שנלמדו בכתה יוד כמו פעולות על פונקציות, ערך מוחלט של פונקציה, קצב השינוי, הקשר בין הפונקציה לנגזרת, חקירת תחומי עליה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים ונקודות קיצון, סרטוט גרף מיצג של הפונקציה, הקשר בין פונקציה מורכבת לפונקציות המרכיבות אותה, זוגיות ואי-זוגיות של פונקציות, בעיות ערך קיצון, ישולבו התכנים החדשים שיילמדו במהלך כתה י״א וישולבו יישומי החשבון הדיפרנציאלי בתחומים שונים :
    - שימושי החשבון הדיפרנציאלי בבעיות מציאותיות בתחומים שונים.
    - בעיות קיצון שימושיות בתחום פתוח ובתחום סגור, בכל סוגי הפונקציות שנלמדו, כולל בעיות נפח, שטח פנים ומעטפת של גופים פשוטים : קובייה, תיבה, גליל ישר ; כולל בעיות תנועה, כלכלה.
    - הרכבה, מכפלה, מנה, סכום והפרש של פונקציות מכל הסוגים שנלמדו, ומשפחות פרמטריות של פונקציות אלו.
    - פתרון בעיות שיש בהן צורך במציאת שיפוע משיק או מציאת משוואת משיק לגרף בנקודה **שעל** גרף הפונקציה.

מומלץ להתחיל עם השתנות קצב השינוי ושימושי הנגזרת השנייה, ובהמשך לשלב את המושגים החדשים תוך כדי היכרות עם משפחות חדשות של פונקציות, כאשר מתעורר הצורך במושגים אלה.

בהצגת פרק זה נפרט את התכנים והדגשים בהתאם לתת הנושאים של הפרק.

דגשים בכל פרק החשבון הדיפרנציאלי

- בכל הפרק של החשבון הדיפרנציאלי, כמו בתוכנית הלימודים כולה, הרעיון הוא לא להכביד בטכניקה אלגברית .
- חשוב להראות דרכים שונות לקביעת סוג הקיצון. למשל, שימוש בטבלת ערכי הפונקציה, שימוש בטבלת ערכי הנגזרת, הסקה מתוך גרף הנגזרת, שימוש בנגזרת השנייה וכו׳.

- יושם דגש על חקירת תכונות של פונקציות גם ללא שימוש בנגזרת. למשל, בפונקציות הרשומות כמכפלה או כמנה של גורמים יושם דגש על זיהוי גורמים בחזקה זוגית וגורמים בחזקה אי-זוגית כאמצעי לזיהוי תחומי חיוביות ושליליות של הפונקציה. (למשל, דוגמה 21)

בהמשך, בכל תת פרק נפרט את הדגשים הייחודיים לו.

השתנות של קצב השינוי של הפונקציה (18 שעות)

נעסוק בשינוי קצב השינוי של הפונקציה ובמשמעויות הגרפיות שלה, הבאות לידי ביטוי בתכונת הקעירות, למשל. שימושי הנגזרת השנייה לתיאור שינוי זה ישמש גם לחזרה והעמקה בחקירת פונקציות פולינומיאליות, פונקציות רציונליות ופונקציות עם שורשים.

תכנים

1. את הנגזרת הראשונה של פונקציה הגדרנו כקצב השינוי של הפונקציה בנקודה. אם נבחן את אופן ההשתנות של קצב השינוי (קצב השינוי של הנגזרת הראשונה) נלמד על קעירות הפונקציה. כאשר קצב השינוי של הפונקציה הולך וגדל (דהיינו הנגזרת הראשונה עולה) הפונקציה קעורה כלפי מעלה (U), כאשר קצב השינוי של הפונקציה הולך וקטן (הנגזרת הראשונה יורדת) הפונקציה קעורה כלפי מטה (∩). לפיכך נגדיר את הנגזרת השנייה כקצב השינוי של פונקציית הנגזרת הראשונה. מהלך הפרק יכלול חזרה והעמקה בקצב השינוי של הפונקציה ובקשר בין הפונקציה לנגזרת הראשונה.
2. הקשר בין סוג הקעירות של הפונקציה לבין סימן הנגזרת השנייה.
3. הגדרה: נקודת פיתול היא נקודה בתחום ההגדרה של הפונקציה, שבה הפונקציה משנה סוג קעירות.
4. זיהוי נקודות פיתול באמצעות הנגזרת השנייה: נקודות חשודות כנקודות פיתול הן נקודות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת ונקודות בהן הנגזרת השנייה אינה מוגדרת.
5. הנגזרת השנייה היא הנגזרת של הנגזרת הראשונה. את כל קשרים בין פונקציה לנגזרת שאנחנו מכירים ניתן גם לתאר כקשר בין הנגזרת לנגזרת השנייה. באופן דומה ניתן להסתכל על הקשרים בין כל שתי נגזרות עוקבות אחרות.
6. תכונות ויזואליות של פונקציות קעורות כלפי מעלה וקעורות כלפי מטה כולל תכונות המשיקים ותכונות המיתרים.
7. בעיות מציאותיות בהן הנגזרת השנייה מתארת השתנות קצב השינוי של הפונקציה. לדוגמה, בפונקציית דרך לפי זמן הנגזרת הראשונה מתארת מהירות והנגזרת השנייה מתארת תאוצה, השתנות קצב שינוי בבעיות מילוי כדים וכדומה.
8. תפקיד הנגזרת השנייה בזיהוי סוג הקיצון ומגבלותיו.
9. נקודות אי-הגדרה של הנגזרות כנקודות חשודות לקיצון ולפיתול.

בהמשך ישולבו התכנים של הפרק הנוכחי בחקירת משפחות הפונקציות בהן נעסוק.

דגשים

- בכדי להרחיב את דימוי המושג, כדאי להסתכל על תכונת השיפוע בנקודות פיתול באופן איכותני וויזואלי. במרבית המקרים הנגזרת הראשונה לא מתאפסת בנקודת פיתול. הקריטריון לזיהוי נקודת פיתול, במקרה של פונקציה גזירה, הוא קיום נקודת קיצון לנגזרת הראשונה של הפונקציה, ואכן אין לו קשר לערך הנגזרת הראשונה בנקודה זו.

נקודת פיתול בה המשיק מקביל לציר ה-x, כאשר $f'(x) = 0$, (כגון x^3-ב $x = 0$) היא נקודת פיתול "אופקית". בדרך כלל, הנגזרת קיימת ו $f'(x) \neq 0$ ולכן נקודות הפיתול הן "משופעות", והמשיק אינו מקביל לצירים (כגון $f(x) = x^3 - x^2$ ב- $x = 0$). לבסוף נקודת פיתול "אנכית" היא נקודת פיתול בה המשיק אנכי (כגון $\sqrt[3]{x}$). קיימות גם נקודות פיתול בהן המשיק אינו מוגדר (כגון $|x^2 - 1|$).

- חשוב לשים לב לכך שנקודות פיתול שבהן הנגזרת הראשונה מתאפסת מתגלות גם במהלך חקירה שמטרתה זיהוי נקודות קיצון, ואילו כדי לזהות נקודות פיתול שבהן הנגזרת הראשונה לא מתאפסת יש צורך לחפש אותן בדרכים נוספות כמו חיפוש נקודות בהן הנגזרת השנייה מחליפה סימן או נקודות אי-הגדרה של הנגזרת הראשונה ועוד.
- בפונקציה גזירה פעמיים, בנקודת אפס של הנגזרת הראשונה: אם הנגזרת השנייה חיובית – לפונקציה מינימום. אם הנגזרת השנייה שלילית – לפונקציה מקסימום. חשוב להדגיש כאן שמדובר במשפט חד-כווני. הכוון ההפוך לא נכון. כמו כן חשוב להדגיש שכאשר הנגזרת השנייה מתאפסת לא ניתן להסיק מהו סוג הקיצון.
- שיפוע גדל פירושו נגזרת ראשונה עולה ולכן קעירות כלפי מעלה. חשוב לשים לב שכאשר השיפוע נעשה יותר תלול בירידה, השיפוע למעשה קטן והפונקציה קעורה כלפי מטה.
- בנקודת פיתול שבה הנגזרת מוגדרת, המשיק בנקודת הפיתול "חותך" את הפונקציה במובן זה שבצד אחד המשיק מעל גרף הפונקציה ובצד השני הוא מתחתיו.

פונקציות עם שורשים ריבועיים (12 שעות)

בכתה יוד הכירו התלמידים פונקציות מהצורה $\sqrt{f(x)}$ בהן הפונקציה הפנימית הייתה ליניארית או ריבועית. בכתה י"א תיערך היכרות רחבה יותר עם פונקציות הכוללות שורש ריבועי. בפרק זה התלמידים נפגשים לראשונה עם אסימפטוטות שונות בשני קצות ציר ה- x, ועם מצבים בהם יש לפונקציה אסימפטוטה אופקית רק בשאיפה לאינסוף או רק בשאיפה למינוס אינסוף.

תכנים

1. פונקציות עם שורש ריבועי בהן השורש הריבועי יכול להופיע כחלק מסכום או מכפלה של פונקציות, וכן במונה או במכנה של פונקציית מנה.
2. סרטוט וחקירת תכונות של פונקציות מהצורה $\sqrt{f(x)}$ בהינתן הגרף של הפונקציה f(x) או עבור f(x) ממשפחת הפונקציות הקיימת בתוכנית הלימודים תוך שמירה על רמת סיבוכיות אלגברית נמוכה (ראו דוגמאות).
3. התכונות המיוחדות של פונקציות עם שורשים ריבועיים:
    1. תחום ההגדרה השונה במהותו מתחום ההגדרה של פונקציות רציונליות.
    2. יכולות להתקבל נקודות קיצון בקצה תחום ההגדרה
    3. יכולות להיות לפונקציה אסימפטוטות שונות באינסוף ובמינוס אינסוף.

דגשים

בפונקציות עם שורשים יש להדגיש את מציאת תחום ההגדרה.

- פונקציית השורש הריבועי אינה גזירה כאשר x=0, אבל יש לה בנקודה זו משיק אנכי, ולגרף הנגזרת יש בנקודה זו אסימפטוטה אנכית
- כדאי לכלול דוגמאות של פונקציות שיש להן שתי אסימפטוטות אופקיות שונות.
- חשוב לעמוד על הבדל בין הפונקציות $f(x) = \sqrt{x^2}$ ו- g(x)=x.
- חשוב להדגיש כי
  1. $\sqrt{m^2} = |m|$
  2. כאשר, בעת פתרון משוואה, מעלים את שני אגפי המשוואה בריבוע, עלולה להתקבל משוואה שיש לה יותר פתרונות מאשר למשוואה המקורית. כל הפתרונות של המשוואה המקורית הם גם פתרונות של המשוואה החדשה אך לא להיפך, ועל כן חובה לבדוק את כל הפתרונות באמצעות הצבה במשוואה המקורית, או לוודא שלשני אגפי המשוואה המקורית חייב להיות אותו סימן.

יש לשים לב לדגשים אלה בשלבים השונים של החקירה כגון בעת מציאת תחום ההגדרה, אסימפטוטות ועוד.

פתרון משוואות אי-רציונליות יילמד במשולב עם חקירת פונקציות עם שורשים, ולא כפרק בפני עצמו, כך שהמשוואות המתקבלות הן ברמת סיבוכיות נמוכה.

חשבון אינטגרלי (25 שעות)

מבוא

בפרק זה מוצג מושג האינטגרל כפונקציית הצטברות של פונקציה רציפה , באמצעות דוגמאות מתוך המתמטיקה ומחוצה לה. בשיאו של הפרק התשתית המושגית שהונחה בפרק על הנגזרת כמייצגת קצב שינוי, מתקשרת עם מושג האינטגרל כפונקציית הצטברות, באמצעות המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי. יוצגו בעיות שימושיות שיש בהן צורך בחישוב הצטברות (למשל, פונקציית הדרך (העתק) כפונקציית ההצטברות של מהירות – דוגמה זו תשמש כמקרה פרדיגמטי לאורך כל הפרק -, הצטברות של מים בברֵכה או קרן בחשבון בנק, חישוב שטח בין גרפים של שתי פונקציות, נפח גוף סיבוב או נפח פירמידה, ממוצע של פונקציה על תחום מסוים (וכהעשרה אורך עקום). נציג בהרחבה מהלך הוראה לפיתוח המושג פונקציית הצטברות.

תכנים

1. פיתוח מושג האינטגרל: הצטברות של גודל מסוים כאשר פונקציה נתונה מתארת את קצב השינוי של אותו גודל: בתחילה במקרה של פונקציה קבועה או פונקציית מדרגות (קישור לסכום סדרות), דיון בתהליכי קירוב, ולבסוף הצטברות של פונקציה רציפה ולפיכך הגדרת פונקציית ההצטברות.

2. המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי – מציאת פונקציית ההצטברות (אינטגרציה) כפעולה ההפוכה למציאת קצב השינוי (גזירה). קישור למושג הפונקציה הקדומה שנלמד בכיתה יוד. הקשר בין גרף הפונקציה, גרף הנגזרת וגרף פונקציית ההצטברות.
3. מציאת האינטגרל עבור פונקציות פשוטות: אינטגרלים של פונקציות פולינום, אינטגרל של הפונקציה $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, הפונקציה $y = \frac{1}{x^n}$, $n \neq 1$, , פונקציות טריגונומטריות (כולל שימוש בזהויות). שימוש בכללים של אינטגרל של כפל פונקציה בקבוע, אינטגרל של סכום והפרש פונקציות, אינטגרל של פונקציה מורכבת כאשר הפונקציה הפנימית היא לינארית. אינטגרל של מכפלת פונקציה בנגזרתה כאשר ניתנת הנחיה לזיהוי הנגזרת הפנימית (הפונקציה הקדומה היא פונקציה מורכבת).
4. יישומים של פונקציית ההצטברות

- מגוון בעיות יישומיות הכוללות תהליך של הצטברות וקצב שינוי ובפרט בעיות הכוללות תנועה. הצטברות של כמות המים בבריכה כאשר נתונה פונקציה המתארת את קצב מילוי/ריקון הבריכה. הצטברות של כסף כאשר נתונה פונקציית תזרים המזומנים, הצטברות של נפח נוזלים כתלות בגובה הכלי וכו'.
- בעיות הכוללות חישוב שטח בין גרף הפונקציה לציר x (הפונקציה יכולה להיות חיובית, שלילית או לשנות סימן), חישוב שטח בין גרפים של שתי פונקציות, חישוב שטחים מורכבים.
- בעיות הכוללות מציאת נפחים כגון פירמידות, גוף סיבוב סביב ציר x, כולל גופים קטומים וטבעות.
הוכחת נוסחאות של נפח של גופים כגון גליל, חרוט, כדור ופירמידה.
- בעיות הכוללות פירוש של הערך הממוצע של פונקציה $f(x)$ בתחום $[a,b]$ ניתן לחשב על ידי $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. (הערך הממוצע של הפונקציה הוא הערך של פונקציה קבועה שההצטברות שלה בקטע הנתון שווה להצטברות של הפונקציה הנתונה $f(x)$).
- מציאת פונקציה על סמך נגזרתה ונקודה שעליה .
- בעיות קיצון המשלבות שימוש באינטגרלים.

דגשים

הגישה המוצעת לאינטגרציה היא דרך רעיון ההצטברות. לגישה זו כמה יתרונות:

- היא מהווה את הבסיס הרעיוני של האינטגרציה.
- היא מאפשרת גישה משולבת לשני מושגי האינטגרל: המסוים והבלתי-מסוים, וקושרת ביניהם.
- היא מובילה באופן טבעי למשפט היסודי של החדו"א.
- היא מאפשרת למידה הדרגתית מבוססת על מושגים שיש להם משמעות בעיני התלמידים (כולל קירוב) ולא רק על פרוצדורות פורמליות (פעילות המציעה "מושג האינטגרל" של מרכז המורים נמצאת בעריכה ותהיה נגישה בהמשך).
- היא מאפשרת הכללה והצגה של יישומים נוספים

מהלך ההוראה

על מנת להציג באופן ידידותי ואינטואיטיבי את המושג "פונקציית הצטברות", נציג בהתחלה את הרעיון של הצטברות באמצעות דוגמאות מחיי היום-יום. כאשר נתונה פונקציה המתארת את קצב השינוי של גודל מסוים ביחס למשתנה בלתי תלוי פונקציית ההצטברות מתארת את כמות הגודל המצטברת ביחס לאותו משתנה. למשל פונקציה של מהירות קבועה מלמדת בכמה מטרים זז הגוף ביחידת זמן אחת, לעומתה פונקציית ההצטברות של פונקציית המהירות מתארת את ההעתק מזמן תחילת התנועה (או במילים אחרות מהו מיקום הגוף הנע ביחס לנקודת התחלת התנועה).

בדיון על כל דוגמה ודוגמה, רצוי לשים דגש על הפירוש של קצב השינוי של הגודל המצטבר ושל הגודל המצטבר עצמו, ועל הקשר ביניהם.

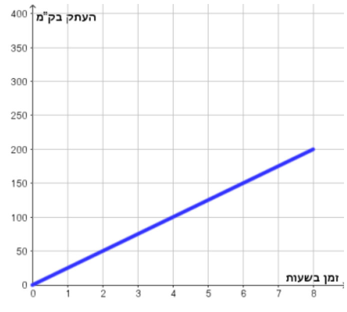
בהתאם לגישה זו, הפרק מחולק לתתי פרקים:

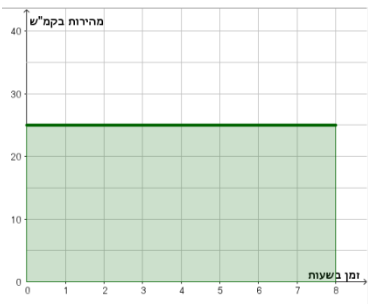
1. הצטברות של פונקציה קבועה ופונקציית מדרגה
2. קרוב הצטברות של פונקציה כללית בעזרת הצטברות של פונקציית מדרגה
3. הגדרת פונקציית ההצטברות ותכונותיה
4. המשפט היסודי של החדו"א
5. שימושים של המשפט היסודי

הערה: גישת ההצטברות מבוססת על תהליך קירוב שמטבעו דינמי ולכן חיוני שילוב נרחב של למידה באמצעות יישומים דינאמיים.

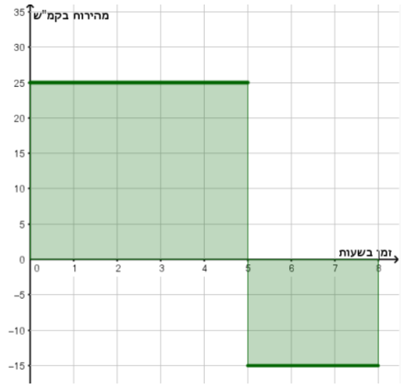
1. הצטברות של פונקציה קבועה ופונקציית מדרגות

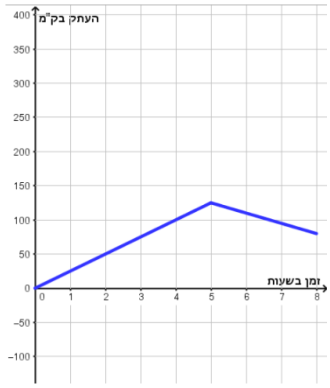
מומלץ להתחיל מדוגמאות של המקרה הפרדיגמטי, של הצטברות של פונקציית מהירות של גוף הנע לאורך קו ישר – קצב השינוי של הדרך ביחס לזמן. חשובה כאן למידה הדרגתית: להתחיל מפונקציה קבועה וחיובית, אז כמות הגודל המצטבר בקטע זמן מסוים מיוצגת על ידי המכפלה של ערך הפונקציה הנתונה במרווח הזמן המתאים (מקרה שכבר ידוע לתלמידים – דרך שווה למהירות הקבועה כפול הזמן בו נע הגוף). במקרים אלה המרחק מנקודת המוצא המצטברת עד לזמן מסוים מיוצגת על ידי השטח שמתחת לגרף פונקציית המהירות (ומעל הציר האופקי) עד לזמן זה. כלומר הדרך המצטברת, ההעתק, הוא פונקציה לינארית של הזמן.





ההכללה למקרה של מהירות קבועה למקוטעין, כלומר כשהמהירות היא פונקציית מדרגה, שאינה בהכרח חיובית בכל הקטעים (ראו איור) . כאשר עוסקים בהצטברות של פונקציה המתארת מהירות שלילית של גוף (תנועה בכוון הנגדי), ההעתק הולך וקטן. יש לשים לב כי הכוונה כאן להעתק, שהוא השינוי במיקום הגוף מתחילת התנועה והוא הגודל המצטבר של פונקציית המהירות, ולא אורך הדרך שהוא הגודל המצטבר של פונקציית המהירות בערכה המוחלט (הדרך הכוללת שעבר הגוף).





- מומלץ להוסיף דוגמאות של פונקציות מדרגה מסיטואציות אחרות, למשל סכום כסף שמצטבר כתוצאה מתזרים מזומנים נתון; זרימת מים ל-/ממיכל; שטחים; ועוד. כמובן אפשר לשלב גם דוגמאות אשר אינן קשורות לסיטואציה חוץ-מתמטית. בכל דוגמה, יש להדגיש כי השטח מתחת לגרף, **בהתחשב בסימן המתאים**, מייצג את כמות הגודל המצטבר (ההעתק במקרה של פונקציית מהירות, כמות הכסף במקרה של תזרים מזומנים, כמות המים בבריכה במקרה של פונקציית זרימת מים אל תוך / החוצה מבריכה, וכדומה).

- מומלץ שהדוגמאות תופענה בסדר הבא:

1. דוגמאות בהן הפונקצייה הנתונה קבועה וחיובית אז מצטבר גודל חיובי ופונקציית ההצטברות עולה. מצאנו התאמה בין השטח לבין הגודל המצטבר.
2. דוגמאות בהן הפונקציה הנתונה שלילית. אז מצטבר גודל שלילי (כי מכפלת הערך השלילי של הפונקצייה בקטע על הציר האופקי הוא שלילי) ולכן פונקציית ההצטברות יורדת. הנגדי של השטח מתחת לגרף מייצג את הגודל המצטבר.
3. דוגמאות בהן הפונקצייה הנתונה מחליפה סימן. מומלץ להתחיל את הטיפול בפונקציה נתונה עם ערכים שליליים בדוגמה בה לערך שלילי יש פירוש חד-משמעי (כגון הכנסה מול הוצאה של כסף, כגון בריכה שמתמלאת, ועוד).

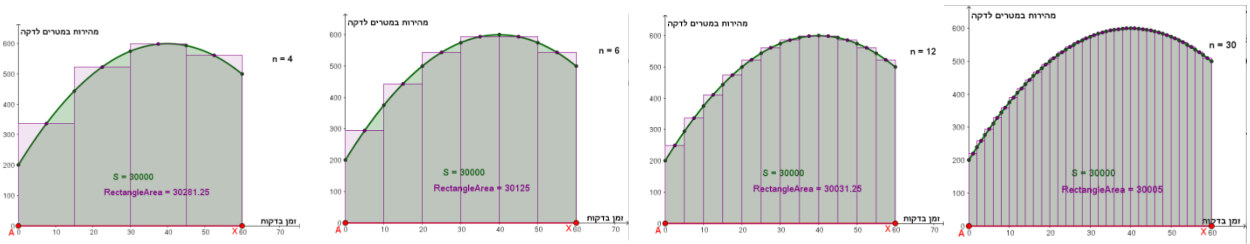
בסעיף זה הפונקציה הנתונה היא קבועה, או פונקציית מדרגה. עולה השאלה כיצד נמצא את פונקציית ההצטברות של פונקציה שאינה קבועה, או שאינה קבועה למקוטעין. במקרה של פונקציה כללית יותר לא מובן מאליו איך למצוא את הגודל המצטבר. שלב זה דורש קירובים ולכן מתבצע בסעיף הבא, לאחר שהתלמידים מכירים היטב את המקרה הבסיסי שנידון בסעיף הנוכחי.

2. קירוב הצטברות של פונקציה כללית בעזרת הצטברות של פונקציית מדרגה

בסעיף הקודם התבססנו על המקרה המיוחד שבו אנחנו יודעים למצוא את את הגודל המצטבר של פונקציית קצב שינוי נתונה - המקרה שבו הפונקציה קבועה, לפחות למקוטעין, כי בכל קטע שבו הפונקציה קבועה, הגודל המצטבר הוא מכפלת ערך הפונקציה באורך הקטע הנתון. עולה השאלה כיצד נחשב את הגודל המצטבר, כאשר הפונקציה הנתונה אינה קבועה למקוטעין, כגון ישר, פרבולה, או פונקציה (רציפה) כללית יותר. היות ואנחנו לא יודעים איך למצוא את התרומה לגודל המצטבר בקטע בו הפונקציה הנתונה אינה קבועה, ניעזר בקירוב של הפונקציה הנתונה בעזרת פונקציה קבועה למקוטעין. לשם כך נחלק את התחום

לקטעים שווים, ובכל קטע נבחר ערך קבוע שמקרב את ערכי הפונקציה הנתונה באותו קטע. כך נוכל לעמוד על הפירושים של הגדלים כגון מהירות ודרך.

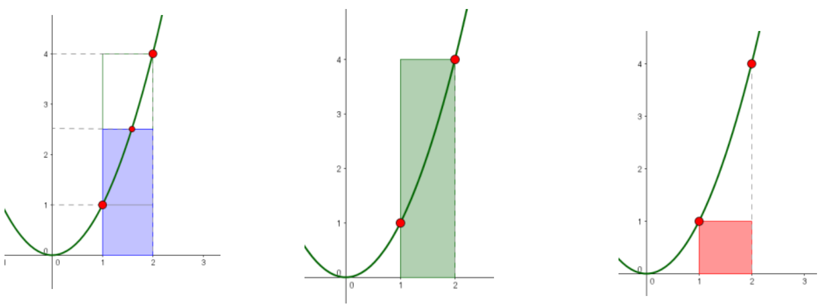
בשרטוט הנ״ל בחרנו בתחילה לחלק את הקטע הרלוונטי ל-$n=4$ תתי קטעים. ככל שנבחר קטעים קצרים יותר ($n=6$, $n=12$, $n=30$ וכך הלאה), על פניו נראה שהגודל המצטבר מתקרב לערך מסויים. לכן נגדיל את n בתקווה לקבל קירוב טוב יותר לאותו ערך, שאותו נגדיר כגודל המצטבר של הפונקציה הנתונה.
מומלץ להתחיל סעיף זה עם דוגמאות שבהן התלמידים יוכלו להגיע למסקנה באופן נומרי בתחילה בעזרת חישובים ידניים ובהמשך ככל שמספר הקטעים גדל, בעזרת כלים טכנולוגיים. למעשה נעשית כאן הבניה



הדרגתית של שיטת המלבנים לחישוב הגודל המצטבר לפונקציה רציפה כלשהי.

הערה: נשאלת השאלה איזה ערך מקורב של הפונקציה הנתונה כדאי לבחור כדי להגדיר את פונקציית המדרגות שמקרבת אותה. אם חשוב לבחור את הקירוב שמתכנס הכי מהר, נבחר, כפי שנעשה בשרטוטים, בכל קטע, את הערך הממוצע בין ערך הפונקצייה בקצה השמאלי של הקטע לבין ערך הפונקצייה בקצה הימני שלו.

לדוגמה, נתבונן בקירובים שונים על ידי מלבנים בפונקציה $f(x)=x^2$ בתחום $[1,2]$.



מלבן בגובה ערך הפונקציה בקצה השמאלי של התחום

מלבן בגובה ערך הפונקציה בקצה הימני של התחום

מלבן בגובה ממוצע ערך הפונקציה בקצה השמאלי והימני של התחום

הערה – בחירת גובה המלבנים המומלצת, כממוצע בין ערך הפונקציה בקצה הימני והשמאלי היא אחת מבחירות רבות אפשריות. בחירת גובה המלבן אינה משפיעה על גבול הערך המצטבר, אלא רק על קצב ההתכנסות.
מתוך סיכום התרומות ההצטברות אפשר לבסס את התחושה שיש התאמה בין הגודל המצטבר לבין שטחי המלבנים, בהתחשב בסימן.

המקרה הפרטי של פונקציה קווית

1. במקרה הפרטי של פונקציה קווית נתונה, חישוב ההצטברות באמצעות הקירוב הנבחר ("גובה" המלבן הוא ממוצע ערכי הפונקצייה בקצות הקטע) נותן את הערך המדויק של השטח. לכן לכאורה, אין אנו זקוקים לקירוב לשם החישוב. יחד עם זאת, מכיוון שההתאמה בין הגודל המצטבר ובין השטח הכלוא עדיין אינה מבוססת חשוב בשלב זה לקרב כל חישוב של הצטברות על ידי קירוב של פונקציית מדרגה. לכן מומלץ לבנות את פונקציית המדרגות בתחילת ההוראה גם במקרה פרטי זה.
2. מקרה פרטי זה והמקרה של פונקציה קווית למקוטעין יעיל במיוחד כדי להתבונן באופי ההצטברות של פונקציה קווית, חיובית ושלילית, עולה ויורדת. הדגש יהיה על שאלות איכותיות (האם סימן הגודל המצטבר חיובי או שלילי?) ועל אומדן הגודל המצטבר ולא על חישובים מדויקים או אלגבריים. יחד עם שאלות אומדן יופיעו בעקביות שאלות לגבי שיפור האומדן, על ידי חלוקה לקטעים יותר ויותר קטנים וחישוב השטח של מלבנים יותר ויותר צרים.

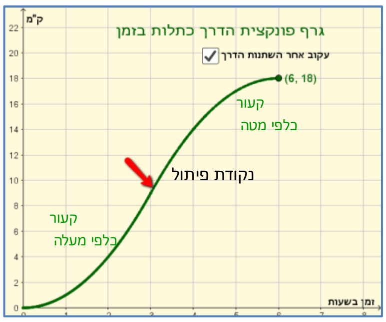
בשלב זה, כאשר מחשבים שטחים כהצטברות, ניתן ללמוד כהעשרה – חישוב של השטח מתחת לגרף הפרבולה בקטע בו הפרבולה עולה, או חישוב השטח של חצי עיגול, חישוב אורך של עקום.

3. **הגדרת פונקציית ההצטברות ותכונותיה**

מטרת סעיף זה היא להגדיר את פונקציית ההצטברות וללמוד איך תכונותיה תלויות בפונקציית קצב השינוי הנתונה. בהינתן פונקציה $f(x)$ רציפה המתארת קצב שינוי של גודל מסויים בתחום $[a,b]$, נתבונן בגודל המצטבר החל מנקודת קצה התחום התחתון (הנקודה השמאלית בתחום) a, ועד לנקודה xהנעה ימינה על הציר האופקי ($a < x < b$). לכל x מתאים ערך מסויים של הגודל המצטבר וכאשר x משתנה גם הגודל המצטבר שמתאים לו משתנה בהתאם. במילים אחרות, הגודל המצטבר הוא פונקציה, היא פונקציית ההצטברות $F_a(x)$ של הפונקציה הנתונה, החל מקצה התחום התחתון.

ניתן ללמוד על תכונות $F_a(x)$

- ערך פונקציית ההצטברות בקצה התחום התחתון הוא אפס: $F_a(a) = 0$.
- כאשר הפונקציה הנתונה חיובית, פונקציית ההצטברות עולה (כי מצטבר גודל חיובי)
- כאשר הפונקציה הנתונה שלילית, פונקציית ההצטברות יורדת (כי מצטבר גודל שלילי)
- כאשר הפונקציה הנתונה חיובית ועולה, פונקציית ההצטברות עולה באופן קעור כלפי מעלה (כי מצטבר גודל חיובי שהולך וגדל יותר ויותר)
- אם הפונקציה הנתונה חיובית ויורדת, אז פונקציית ההצטברות עולה באופן קעור כלפי מטה (כי מצטבר גודל חיובי שהולך וגדל פחות ופחות)



גם בקשרים האלה ודומים מומלץ לדון בסיטואציות חוץ-מתמטיות.

בשלב זה ניתן לסמן את פונקציית ההצטברות של $f(x)$ כאינטגרל: $F_a(x) = \int_a^x f(u)du$.

הערה: השתמשנו ב-u לסמן את המשתנה הבלתי תלוי של הפונקציה הנתונה בכדי להבחין בינו לבין הקצה העליון של הצבירה x, שהוא משתנה של פונקציית ההצטברות. היות ו-x מסמן ערך מסוים על הציר האופקי, הוא לא יכול גם לסמן משתנה שרץ (ה-a עד x באותו ציר).
רצוי להדגיש כאן את חשיבות הסימון המפורש של du: הרי מה שמצטבר, התרומות להצטברות, בכל המקרים שנידונו, הן מכפלות בין ערך (מקורב) של הפונקציה הנתונה f בקטע על הציר האופקי שהוזכר כאן על ידי הסימון du.
אפשר גם לציין כי סימן האינטגרל מקורו באות S המייצגת את המילה Sum (סכום).

הגדרת פונקציית ההצטברות כוללת למעשה את האינטגרל המסוים שהוא הערך של פונקציית ההצטברות עבור ערך נתון b של קצה התחום העליון: $F_a(b) = \int_a^b f(u)du$.
רצוי לחזור על חלק מהדוגמאות המוכרות כבר לתלמידים ולהתאים להן את הסימונים. באותו זמן רצוי להדגיש ולהבחין בין הפונקציה הנתונה f, לפונקציית ההצטברות F_a התלויה בפרמטר a המייצג את קצה התחום התחתון, ממנו מתחילים את ההצטברות.

4. המשפט היסודי: הקשר בין פונקציית ההצטברות לפונקציית קצב השינוי הנתונה

סעיף זה מהווה את הפסגה של לימוד האנליזה ומתפתח באופן ישיר וטבעי מהסעיף הקודם. מטרתו העיקרית היא לבסס את הטענה כי הנגזרת / קצב השינוי של פונקציית ההצטברות היא פונקציית קצב השינוי הנתונה.
כיוון שפונקציית ההצטברות נבנתה באמצעות פונקציית קצב שינוי נתונה, ניתן לצפות שקצב השינוי של ההצטברות הוא למעשה הפונקציה הנתונה. בסעיף זה נראה כי $f(x)$ היא הנגזרת של $F_a(x)$ כאשר $f(x)$ פונקציה נתונה ו- $F_a(x)$ פונקציית הצטברות שלה, החל מנקודה $x = a$. נראה זאת קודם באמצעות תכונות של גרפים ובהמשך על ידי שיקול אנליטי.
בשלבים הקודמים ראינו קשרים שונים בין הפונקציה הנתונה לבין פונקציית ההצטברות שלה.
לקראת ניסוח המשפט היסודי של החדו"א והצדקתו נתבונן במקבץ של הקשרים הרומזים או מצביעים במפורש על כך שהקשר בין פונקציית ההצטברות לפונקציה נתונה הוא קשר בין פונקציה לנגזרת.
מומלץ להביא דוגמאות מסוגים אחדים

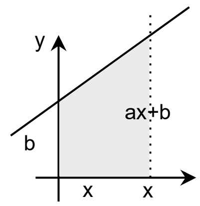
1. דוגמת הקשר בין מהירות ודרך מלווה אותנו לכל אורך הדרך החל מהצגת הנגזרת ולכן חשוב להציג אותה גם כאן. כעת נשתמש בהקשר זה כדי להבליט את העובדה שהקשר בין פונקציית ההצטברות לפונקציה הנתונה מאפיין קשר בין פונקציה לנגזרת. (ראו דוגמה 3). ההקשר הנוכחי מוכר לתלמידים מכתה י' וידוע להם שפונקציית המהירות היא הנגזרת של פונקציית ההעתק.
2. דוגמה מהקשר נוסף תעלה את השאלה אם בדרך כלל מתקיים קשר דומה בין פונקציית ההצטברות לפונקציה הנתונה. דוגמה של מילוי ברכה היא דוגמה טובה. אחד היתרונות של דוגמה זו שקל לראות קצב ריקון בריכה כקצב שינוי שלילי.

3. כדאי להביא דוגמה על הצטברות שטח מתחת לגרף של פונקציה. למשל: נתון גרף, עם ערכים חיוביים בלבד. חוקרים את פונקציית הצטברות כמות הצבע הדרושה לצביעת שטח מתחת לגרף. עם שאלות דומות לקודמות על עליה, פיתול, סוגי קעירות וכו׳.
4. יש לשלב דוגמאות שבהן הביטוי האלגברי לשטח מתחת לגרף של הפונקציה נתונה מזכיר את הביטוי האלגברי של הפונקציה הקדומה.

למשל:

נחשב את השטח המוגבל בין ישר $f(x) = ax + b$, הישר $x=x_0$ והצירים, כשטח של טרפז.

נשים לב שהביטוי לשטח הוא $S = \frac{1}{2}ax^2 + bx$, פונקציה קדומה של הפונקציה הנתונה, ונחקור אם הקשר ממתקבל גם במקרים נוספים.

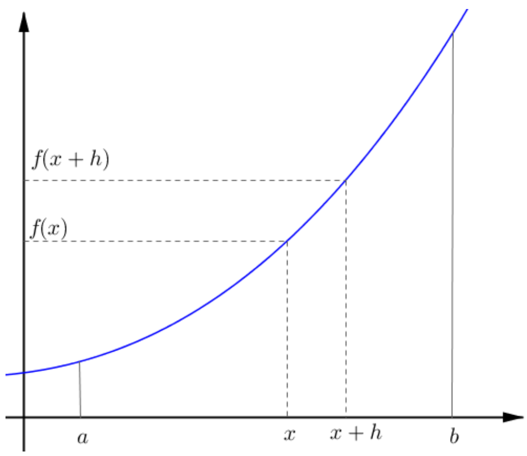
פונקציית ההצטברות	חישוב	השטח המצטבר	הישר
$S = \frac{1}{2}ax^2 + bx$	$S = \frac{(b + ax + b) \cdot x}{2}$		$y = ax + b$

מקור הכולל דוגמאות נוספות: מקרה או תופעה מתמטית

המקרים הפרטיים שהוצגו יכולים להעלות את ההשערה הבאה:

בהינתן פונקציה $f(x)$ בתחום $a \le x$, פונקציית ההצטברות שלה היא פונקציה קדומה שלה. במילים אחרות, אנחנו משערים שהפונקציה הנתונה היא הנגזרת של פונקציית ההצטברות שלה.

נבחן את ההשערה במקרה פשוט בו הפונקציה חיובית ומונוטונית עולה.



נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה, חיובית ועולה בתחום $a \le x \le b$.

נסמן ב- $F_a(x)$ את הצטברות הפונקציה f בקטע $[a, x]$, כאשר נקודה כלשהי בתחום. ההצטברות $F_a(x)$ היא פונקציה של x.

נתמקד בנגזרת של פונקציית ההצטברות.

נבחר x כלשהוא בתוך התחום: $a<x<b$. נרשום ביטוי למנת ההפרשים של פונקציית ההצטברות בקטע $[x, x+h]$ (h>0)

$$\frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h}$$

נתבונן בשבר: מכנה השבר הוא כמובן אורך "הקטע האחרון" $[x, x+h]$.

מונה השבר מבטא את התוספת להצטברות הפונקציה "בקטע האחרון" $[x, x+h]$.

לו היה מדובר בפונקציה קבועה שערכה k, התוספת להצטברות הייתה $k \cdot h$.

במקרה הכללי נצטרך להעריך את התוספת להצטברות.

כיוון שמדובר בפונקציה עולה, התוספת להצטברות יותר גדולה מאשר $f(x)\cdot h$ ויותר קטנה מאשר $f(x+h)\cdot h$. במילים אחרות:

$$f(x)\cdot h \le F_a(x+h)-F_a(x) \le f(x+h)\cdot h$$

ואם נחלק את כל האגפים ב- h נקבל: $f(x) \le \frac{F_a(x+h)-F_a(x))}{h} \le f(x+h)$

הנגזרת של פונקציית ההצטברות היא הגבול של השבר $\frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h}$ כאשר $h\to 0$.

כיוון שמדובר בפונקציה רציפה, $f(x+h)\to f(x)$ כאשר $h\to 0$.

מכאן

$$f(x) \le F_a{}'(x) \le f(x)$$

ומכאן שהנגזרת של פונקציית ההצטברות $F_a(x)$ היא הפונקציה המקורית $f(x)$. מ.ש.ל.

הערות:

1. אמנם הנחנו ש- 0<h אבל ניתן לבצע שיקול דומה עבור 0>h.
2. אמנם הנחנו שהפונקציה הנתונה חיוביות. ניתן לבצע את אותו מהלך עם פונקצי שלילית
3. לאחר הצגת המקרה הפשוט של פונקציה עולה ניתן לדון מה קורה במקרה של פונקציה יורדת או פונקציה עולה ויורדת למקוטעין.

העשרה: השלמת ההוכחה במקרים הנוספים.

למשפט היסודי יש חלק שני שעוסק בבחירת הפונקציה $F_a(x)$ מתוך כל הפונקציות שמקיימות $F_a'(x)=f(x)$. חלק שני זה טוען כי

i. אם פונקציהF מקיימת $F'(x)=f(x)$, אז $\int_a^x f(u)du = F(x)-F(a)$.

בפרט: $\int_a^b f(u)du = F(b)-F(a)$

ii. אם לשתי פונקציות יש אותה נגזרת $f(x)$ אז ההפרש שלהן קבוע.

iii. מבין כל הפונקציות שמקיימות $F'(x)=f(x)$ פונקציית ההצטברות F_aהיא זו שערכה ב- a שווה 0.

iv. בחירה אחרת של a תיצור פונקציה קדומה אחרת עם נגזרת $f(x)$. ההפרש בין שתי הפונקציות הקדומות הוא קבוע והקבוע שווה להצטברות בין a_1 ל- a_2.

5. יישומים

המשפט היסודי מלמד אותנו שפונקציית ההצטברות של פונקציה נתונה $f(x)$ החל מנקודה a היא הפונקציה הקדומה $F(x)-F(a)$. בסעיף הנוכחי ניישם מסקנה זו לצורך פתרון בעיות ושימושים שונים:

- חישוב ההצטברות בהקשרים מציאותיים שונים כגון, מהירות/ העתק, מילוי בריכה, הצטברות הורמונים וכו׳. אם בשלבים הקודמים של המהלך הערכנו את ההצטברות באמצעות קירובים,

עכשיו נוכל למצוא אותה ישירות באמצעות פונקציה קדומה, או באמצעות חישובי שטחים של צורות גאומטריות מוכרות.

- חשובים של שטחים מתחת עקומה
- חישוב נפחים של גופים כגון נפח פירמידה (ראו למשל דוגמא 19) , כהצטברות.
- פיתוח הנוסחה לחישוב נפח פירמידה כמקרה של הצטברות (אפשר להסתפק במקרים פרטיים).
- חישוב נפח גוף סיבוב, ובפרט, הבנה שהנגזרת של פונקציית הצטברות הנפח היא פונקציית שטח החתך.

במהלך החלק היישומי של הפרק נחזור אל מציאת הפונקצייה הקדומה בהינתן פונקציית הנגזרת, נושא שנלמד בכתה יוד.

פעילות לתלמידים, פונקצית ההצטברות ומושג האינטגרל, מרכז המורים.

זהויות טריגונומטריות ויישומן בבעיות בגאומטריה (15 שעות)

מבוא

פרק זה מאפשר קישוריות לנושא הגאומטריה במישור ובמרחב ומכין את הרקע הדרוש ומוטיבציה ללימוד חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות. נמשיך לעסוק בפונקציות הטריגונומטריות שנלמדו בכיתה יוד, נרחיב את השימוש בזהויות ונעסוק בצורות גאומטריות במישור ובמרחב. זהו למעשה סבב שני של העמקה ועליה ברמת הקושי של החומר שנלמד בכיתה י׳.

תכנים

1. הכרת הזהויות $sin(\alpha \pm \beta), cos(\alpha \pm \beta), sin2\alpha, cos2\alpha$

$sin\alpha \pm sin\alpha \;,\; cos\alpha \pm cos\beta$,ופתרון משוואות מתאימות. מספיק להוכיח את אחת מ- 4 הזהויות של סינוס או קוסינוס של סכום והפרש זוויות באופן אלגברי או גאומטרי ולהראות איך 3 הזהויות האחרות של סכום והפרש זוויות ניתנות להסקה מהזהות שהוכחה. מטרת הלימוד אינה שיפור המיומנויות הטכניות של התלמידים בהוכחת זהויות ובפתרון משוואות מסוג זה - הזהויות תילמדנה בעיקר כדי ליצור תשתית תאורטית להוכחת הנגזרת של פונקציית הסינוס, ולפישוט פונקציות לצורך חקירה.

2. שימושים של המשפטים הטריגונומטריים להוכחת משפטים וטענות בגאומטריה.
3. יישומים בגופים מרחביים פשוטים כמו כדור, מנסרה ישרה, פירמידה ישרה, גליל ישר וחרוט ישר, לחישובי אורכים, שטחים ונפחים. מטרת היישומים במרחב היא לצור סבב ראשון של הכרות עם הגופים, ללא שימוש במשפטים של גאומטריה במרחב שיילמדו בכיתה יב.

דגשים

- כפרק המשך וההעמקה של החומר שנלמד בכתה י׳, יש להתייחס לדגשים שפורטו בהקשר זה בתוכנית י׳.

פונקציות טריגונומטריות (15 שעות)

נשתמש בכלים ומיומנויות שנלמדו עד כה באנליזה ובטריגונומטריה. לכל אורך הלמידה נדגים ונדגיש שימושי הפונקציות הטריגונומטריות ותכונותיהן ביישומים מתחומים שונים כגון מתחום הביולוגיה, הפיסיקה והכלכלה. נחשוף לפתרון בעיות בדרכים שונות ובכלים איכותניים. מוצע ללמד פרק זה לאחר פרק החשבון האינטגרלי.

תכנים

1. שימוש בתכונות המחזוריות ותכונות הסימטריה של הפונקציות הטריגונומטריות, כאמצעי להבנת התכונות של פונקציות המורכבות מהן. בגלל תכונות אלו מספיק לחקור את הפונקציה בתחום מצומצם (למשל $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ עבור פונקציית ה-sin, וניתן להסיק לגבי התנהגותה ב-R כולו.

2. שימוש בהזזות ומתיחות לצורך חקירת פונקציה טריגונומטרית $f(x) = (bx + c) + d$, והבנת תפקידי הפרמטרים שלה.

3. מציאת הפונקציה הנגזרת של פונקציית הסינוס המוגדרת ברדיאנים תוך שימוש תוך שימוש בכך שכאשר x שואף לאפס $\frac{sin\,(x)}{x} \to 1$ (ניתן להצדיק את חישוב הגבול בדרכים שונות כולל שימוש בייצוגים ויזואליים. דוגמאות להוכחות ראו בעמוד 617 בספר "ללמוד וללמד אנליזה"

4. מציאת הפונקציות נגזרות של פונקציות הקוסינוס והטנגנס בעזרת נגזרת פונקציית הסינוס.

5. חקירת פונקציות המתקבלות על ידי סכום והפרש, מכפלה ומנה של פונקציות טריגונומטריות והרכבה של פונקציות פולינום ושורש על פונקציות טריגונומטריות בעלות ארגומנט לינארי.

6. פתרון בעיות ערך קיצון (רצוי להדגים פתרון של בעיית ערך קיצון בלי שימוש בגזירה)

7. אינטגרלים מיידיים של פונקציות טריגונומטריות, כולל שימוש בזהויות, ויישומיהם.

8. שילוב של יישומים בהן נעשה שימוש בפונקציות טריגונומטריות כגון:

- היטל של תנועה מעגלית (מיקום כיסא בגלגל ענק, בוכנה שמסובבת ציר), או של תנועה על חלק ממעגל (נדנדה, מטוטלת).
- פונקציות טריגונומטריות כפתרונות של משוואת תנועה הרמונית. לדוגמה: קפיץ, קפיץ כמודל לויברציה של מולקולות.
- תיאור וקירוב לתופעות מחזוריות שאינן בהכרח טריגונומטריות: מרחק של כדור-הארץ מהשמש, אורך היום והלילה כתלות ביום בשנה ובקו הרוחב, גובה של סירה במחזור של גיאות ושפל, שעון ביולוגי של בעלי חיים, גודל אוכלוסייה של טורף ונטרף (הדגמה ע"י שימוש בגרפים של תוצאות אמפיריות).
- הערה: תופעות נוספות כגלי קול.

דגשים

- מחזוריות

- כאשר מעוניינים בתכונות הגרפיות של פונקציה, יש להתייחס למחזוריות שלה, ולהסיק איך נראה הגרף בתחום הכולל מספר מחזורים של הפונקציה.
- יש לחקור הרכבת פונקציות כגון $f(x) = \sqrt{sinx}$ או $f(x) = \frac{1}{cosx}$ ולשאול באופן כללי ועבור מקרים מסויימים, כאשר נתון ש- f היא פונקציה מחזורית ו- g אינה פונקציה מחזורית, לשאול אם $f(g(x))$ פונקציה מחזורית, ואם $g(f(x))$ היא פונקציה מחזורית.
- הערה - נבדוק מחזור של סכום ומכפלה של שתי פונקציות בעלות מחזור משותף.
- בפיתוח נוסחת הנגזרת תודגש ההסתכלות האיכותנית על הנוסחה תוך דיון בקשר בין תכונות הפונקציה לתכונות הנגזרת.
- בחישובי אינטגרל של פונקציה טריגונומטרית יש להתחשב בתכונת המחזוריות והסימטריה.

- שימוש במחזוריות בחישובים של אינטגרל של סכום פונקציות שהן הזזה אחת של השניה
- הסתכלות איכותנית על השפעת התוספת או המכפלה של פונקציה מחזורית לפונקציה לא מחזורית כגון: $f(x) = xsinx$ $f(x) = sinx + x^2$,

○ שימוש בזהויות

- שקילות של פונקציות לפי הזהויות הטריגונומטריות שנלמדו, לשם חקירת פונקציות ומציאת אינטגרלים
- קביעת הזוגיות או אי הזוגיות של הפונקציות הטריגונומטריות

○ טרנספורמציות ופעולות על פונקציות והרכבתן

- חקירה של פונקציות טריגונומטריות תיעשה הן בכלים של חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי והן באופן איכותני

○ רדיאנים

- יובהר הקשר בין פונקציות טריגונומטריות ברדיאנים ובמעלות באמצעות טרנספורמציית המתיחה האופקית.
- תובהר הסיבה לשימוש ברדיאנים בהוכחת הנגזרות של הפונקציות הטריגונומטריות

○ הדוגמאות היישומיות

- הדוגמאות ישולבו בהוראה ולא יילמדו כפרק עצמאי.

המטרה בדוגמאות היישומיות היא להבין בכלים המתמטיים שיש לתלמיד, בהינתן גרף, מה ניתן ללמוד מהגרף, או לבנות גרף לפי מודל מתמטי נתון. אין הכוונה להכנס לפירוט של השיקולים הפיזיקליים והגאומטריים מהם נובע המודל, פרט להסבר איכותי כללי.

הסתברות (25 שעות)

מבוא

פרק ההסתברות מהווה המשך של הנלמד בחטיבת הביניים. בחטיבה העליונה התלמידים יעמיקו את היכרותם עם תהליכים אקראיים ויקבלו בסיס פורמאלי ללימוד האינטואיטיבי מהחטיבה של נושא ההסתברות.

תורת ההסתברות נועדה לטפל במצבים של אי-וודאות.

מטרות על

1. הכרות עם תופעות של אי-וודאות.

2. הכרות עם דרכים לקביעת ההסתברויות (תאורטית לעומת ניסויית) והקשר ביניהם

3. משמעות ההסתברות ככלי לחיזוי בניסויים מבוקרים ובחיי היום יום.

4. הכרת השימושים של הסתברות במדעים

5. הכרות עם אופן חישוב הסתברויות בניסויים חד שלביים, דו-שלביים, תלת-שלביים, וניסויים רב שלביים.

תכנים

חזרה על הנלמד בחטיבת הביניים תוך שימוש במושגים ובסמלים המקובלים.

בפרק ההסתברות נדון רק במרחב מדגם סופי ובמקרה של התפלגות רציפה אחידה בה ניתן להגדיר הסתברות בעזרת יחס שטחים.

<u>מרחב המדגם</u> הוא קבוצת כל התוצאות האפשריות בניסוי.

<u>מאורע</u>: מאורע פשוט (תוצאה אפשרית אחת ממרחב המדגם), מאורע מורכב (קבוצת תוצאות אפשריות – ניתן להגדיר מאורע מורכב תוך שימוש במושגים "או", "גדול/קטן מ-", "לכל יותר", "לפחות"), מאורע וודאי, מאורע בלתי אפשרי, מאורעות זרים, מאורעות משלימים.
פעולות של איחוד מאורעות, חיתוך מאורעות ומציאת המאורע המשלים גם תוך שימוש בדיאגרמת ון.

<u>הסתברות</u>: חישוב תאורטי במצבים שניתן להניח קיום מאורעות פשוטים שווי הסתברות. אופן חישוב ההסתברות כיחס שטחים (בהנחה של התפלגות אחידה). אופן חישוב ההסתברות כשכיחות יחסית.

הסתכלות על תוצאות ניסוי בודד או מספר קטן של ניסויים לעומת הסתכלות על התוצאות של מצבור גדול של ניסויים (הקשר בין חישוב תיאורטי לתוצאות ניסיוניות). דיון אינטואיטיבי בחוק <u>המספרים הגדולים.</u>

<u>חוקי / כללי ההסתברות</u>:

- ההסתברות של מאורע A היא בין 0 ל- 1: $0 \le P(A) \le 1$
- ההסתברות של מאורע וודאי היא 1: $P(□) = 1$, כאשר □ מרחב המדגם
- ההסתברות של מאורע בלתי אפשרי היא 0: $P(\emptyset) = 0$
- אם $A \subseteq B$, אז $P(A) \le P(B)$
- הסתברות של מאורע משלים למאורע A: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- הסתברות של איחוד מאורעות:
  * לכל שני מאורעות A ו- B מתקיים: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  * עבור A ו- B מאורעות זרים: $P(A \cap B) = 0$ ולכן $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  * עבור $A_1, A_2, \ldots A_n$ מאורעות זרים:
    $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$

<u>מאורעות תלויים והסתברות מותנית</u>:

שני מאורעות הם בלתי תלויים כאשר העובדה שמאורע אחד מתרחש לא מוסיפה מידע לגבי התרחשותו של השני (כלומר לא משפיעה על ההסתברות שהמאורע השני יתרחש). חשוב לציין כי הגדרה זו <u>סימטרית</u>. בהמשך ניתן ביטוי פורמלי להגדרה זו.

ההסתברות שמאורע A יקרה כאשר ידוע שמאורע B קרה נקראת הסתברות מותנית ומסומנת כ- $P(A/B)$.

מהגדרות אלו, ניתן להסיק כי :

- A ו- B הם מאורעות בלתי תלויים אם ורק אם : P(A / B) = P(A) [וברור כי ניתן להחליף בין A לB בנוסחה זו]

- A ו- B הם מאורעות בלתי תלויים אם ורק אם : $P(A/B) = P(A/\bar{B})$

- מתוך הגדרת ההסתברות המותנית נובע ש : $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

- משפט : A ו- B הם מאורעות בלתי תלויים אם ורק אם : P(A ∩ B) = P(A) · P(B)

- ככל שהסתברות $P(A/B)$ יותר קרובה לאפס, הרי שאנחנו מתקרבים למצב שבו A ו B זרים.

- ככל שהסתברות $P(A/B)$ יותר קרובה ל P(A) הרי שאנחנו מתקרבים למצב שבו הידיעה ש B מתרחש לא משפיעה על הסיכוי לקבל את A, כלומר אנחנו מתקרבים לכך ש A וB הם מאורעות בלתי תלויים

- ככל שהסתברות $P(A/B)$ יותר קרובה לאחד, הרי שאנחנו יותר מתקרבים למצב שבו B גורר את A (כלומר שמאורע B מוכל ב A).

- נזכיר כי גם כאשר המאורעות תלויים P(A / B) בדרך כלל שונה מ P(B / A) ושוני זה בולט במיוחד כאשר ההסתברות של A קרובה ל 1 ושל B מאוד קטנה (ראו דוגמאות 7,8 בנספח 1, חלק ההסתברות).

<u>הכרות עם ייצוגים ויזואליים של הנתונים / ההסתברויות</u> : טבלה דו-ממדית, עץ הסתברויות, ייצוג באמצעות שטח, דיאגרמת וון ומודלים נוספים אחרים.

למשל :
הדגימו את נוסחת ההסתברות המותנית בעזרת דיאגרמות וון. בפרט, קחו את המקרה בו ההסתברות של מאורע A ומאורע B שווים לעומת המקרה בו ההסתברות של מאורע B קטנה בהרבה מההסתברות של מאורע A.

<u>ניסוי רב שלבי - ייצוג באמצעות עץ הסתברויות</u> :

- אופן בניית עץ ההסתברויות והמשמעות של כל מסלול בעץ – כולל הסבר "חוק המכפלה" באמצעות הגדרת ההסתברות המותנית ודיון במקרים שבהם המאורעות בעץ תלויים לעומת המקרים בהם הם בלתי תלויים.

- ייצוג מאורעות רב-שלביים (דו-שלביים או תלת- שלביים).

- אופן חישוב הסתברויות של מאורעות מורכבים באמצעות העץ – תוך הסבר החישוב באמצעות ההסתברות המותנית.

- מאורעות רב-שלביים תוך שימוש בנוסחת הבינום של ניוטון והסקת מקדמי הבינום באמצעות בעיות ספירה

דגשים

- יובאו דוגמאות ויישומים ממדעי הטבע והחברה, כגון גנטיקה, בדיקות רפואיות וצפנים כדרך להרחבת הדעת.

- נפתח מודעות לקיום של אינטואיציות מוטעות בנושא ההסתברות (ראו דוגמאות 7,8 בנספח 1, חלק ההסתברות)

- בעיות הספירה כלולות בעיקר כמוטיבציה ודרך להסביר את נוסחת הבינום - אין צורך לדון בשאלות ספירה יותר סבוכות מאלו המובאות בנספח הדוגמאות (נספח 2).

- נדגיש את הגישה הביקורתית ביישום הגישה ההסתברותית בחיי היום-יום. בפרט, יודגש כי "בבעיות מהחיים" יש הרבה פעמים עמימות, שהשלכותיה על חישוב ההסתברויות יכולה להיות משמעותית. לפיכך, יישום של עקרונות הסתברותיים בחיי יום יום דורש בחינה ביקורתית של ההנחות לגבי ההסתברויות ותוצאותיהן (ראו דוגמאות 7,8 בנספח 1, חלק ההסתברות).

<u>הערה</u>

- משולש פסקל והקשר בינו לבין מקדמי הבינום

- הוויכוח האם הטבע הוא הסתברותי או דטרמיניסטי הוא ויכוח פילוסופי. ישנם מודלים הסתברותיים המסייעים לנו בהבנת תופעות שאותן אנו לא יודעים לחזות באופן דטרמיניסטי (האם הטלת מטבע היא הסתברותית או דטרמיניסטית? האם הוולד יהיה בן או בת? לטובת איזה מועמד יצביע כל אזרח?) והשימוש בהם במדע, בטכנולוגיה בכלכלה וחברה .... ואפילו במתימטיקה (הוכחות תוך שימוש בהסתברות!) רחב ומעניין. נושא זה יכול להיכלל במשימות קריאה וחקר.

נספח 1: מקומן של ההוכחות בתוכנית הלימודים

הוכחות הן מרכזיות בתוכנית הלימודים ברמת 5 יחידות לימוד והן משולבות בכל נושאי הלימוד שלה. יש ביטוי לכך גם ברציונל של התוכנית בתחילת מסמך זה. בנספח הנוכחי נעמוד על היבטים מרכזיים הקשורים להוכחות אשר מתבטאים לאורך התוכנית בכלל, ובפרקים כגון הוכחה באינדוקציה מתמטית בפרט.

קיימות הפניות מהנספח אל מקומות רלוונטיים בתוכנית וקיימות הפניות מתוך התוכנית אל סעיפי הנספח.

דגשים קשורים להוכחות שרצוי להדגיש בספרי הלימוד ובהוראה

1. במתמטיקה, טענה מתקבלת כנכונה רק אם יש לה הוכחה.
2. מטרה מרכזית של הוכחות בתוכנית הלימודים ברמת 5 יח"ל היא להסביר מדוע הטענה נכונה. לעיתים קרובות הבנת הסיבות מדוע הטענה נכונה מבססות קשרים בין האובייקטים המתמטיים המעורבים בה. מסיבה זו יש להעדיף תמיד הוכחות מסבירות על פני הוכחות שרק מאשרות שהטענה נכונה. באותה רוח נציין שיש לשים דגש על בניית שרשרת היסקית נכונה תוך שילוב של כל הנימוקים הדרושים, ולאו בהכרח על הכתיבה הפורמלית .
3. חשוב לפתח אצל התלמידים מיומנויות שונות הקשורות בהוכחה :

- להתנסות בפירוש הוכחות המוצגות ע"י אחרים (המורה בכיתה, ספר לימוד, חברים במהלך דיון).

- להתנסות בבנייה של הוכחות, הן בתרגילים שבהם ההוכחה היא לב התרגיל, והן בהצדקה של שיקולים שהתלמיד מעלה במהלך דיון. לשם כך חשוב שמשימות רבות המוצגות לתלמידים ידרשו הוכחה או הצדקה.
- להבחין בין שיקולים נכונים ושגויים במהלך ההוכחה, ובפרט:
  - לזהות הנחות בלתי-מוצדקות,
  - לזהות שיקולים מעגליים,
  - לזהות מצבים בהם לא מתקיימים התנאים של משפט בו משתמשים.

4. כדי שתלמידים יוכלו לעקב אחרי הוכחה הם חייבים לפרש את הטענה. ניתן להשיג זאת על ידי הצגת הטענה באמצעות דוגמאות (גם דוגמאות שהתלמידים יוצרים בעצמם) וגם על ידי ניסוחה במילים של התלמיד.
5. חשוב שהתלמידים יפנימו את הרעיון שהוכחה תקפה לגבי כל המקרים בהם מתקיימים תנאי הטענה. במילים אחרות: לטענה שהוכחה אין יוצאים מן הכלל ולא יכולה להיות דוגמה נגדית.
6. תוכנית הלימודים מעודדת חקר והכללות, המבוססות על חקירת מקרים פרטיים אך בינתיים לא הוכחו אלא נוסחו כהשערות. על כן חשוב במיוחד לעורר ולחזק את המודעות למעמד של השערות: טענה היא בגדר השערה כל עוד לא הוכחה.
7. יש להסביר איך נושא ההוכחה מתקשר ללוגיקה: אין צורך להציג את הלוגיקה האבסטרקטית ואף לא את הטרמינולוגיה הקשורה בה, אך יש להציג את כללי הבסיס שמושג ההוכחה נגזר מהם, למשל
   1. אם "א" גורר "ב" ו-"ב" גורר "ג" אז "א" גורר "ג",
   2. אם "א" אז "ב" שקול ל: אם "לא ב" אז "לא א",
   3. יתכנו מקרים בהם "א" גורר "ב" אך "ב" אינו גורר "א" (כלומר, משפט לא גורר את המשפט ההפוך לו).

   כללי הלוגיקה האלה יוצגו במסגרת ההקשר שהצורך בהם עולה בו ולא כיחידה נפרדת.

8. באופן דומה יש להציג את תפקידן של ואת חשיבותן של דוגמאות נגדיות ובהקשר זה לבנות את הבסיס להוכחה על דרך השלילה. כדאי להדגיש שהרעיון של הוכחה בדרך השלילה הוא להראות שאם הטענה לא נכונה מתקבל אבסורד – אם הטענה איננה נכונה ניתן להוכיח טענה אחרת שידועה כשגויה.
9. הנושא אינדוקציה מתמטית נפתח ביחידת מבוא המציגה את רעיון ההוכחה תוך כדי הדגמה והתנסות. חשוב להציג את הנושא באמצעות דוגמאות פשוטות כדי להפנות את הקשב של התלמיד לרעיון ההוכחה, ללא הפרעה של חישובים אלגבריים מורכבים. יש לדאוג שצורת הוכחה זו תופיע בהמשך בתחומים רבים ככל שניתן.
10. הוכחות בדרך של אינדוקציה מתמטית ובדרך השלילה נחשבות ככלים מתמטיים חשובים אך לא אינטואיטיביים. הטמעת כלים אלה בהלך החשיבה של התלמידים דורשת זמן ומאמץ.
11. דיון בתפקידן של דוגמאות:

- דוגמה תומכת (מקיימת את תנאי הטענה וגם את התוצאה שלה): דוגמאות תומכות חשובות בשיח המתמטי. הן מחזקות השערות ומעודדות להמשיך לחקור ולחפש הוכחה. יחד עם זאת חשוב לחזור ולחזק את המודעות שעם כל חשיבותן של הדוגמאות התומכות הן אינן מוכיחות טענות כלליות. הדיון בסוגיה זו חשוב כיוון שבשיקולים יומיומיים ואף במדעי הטבע, ממצאים אמפיריים כן משמשים כראיות.
- ניתוח של הסיבות שבגללן דוגמה תומכת מקיימת את הטענה לעיתים מאירה את הרעיון של ההוכחה הכללית.

- דוגמה נגדית (מקיימת את תנאי הטענה אך לא את התוצאה שלה) סותרת את הטענה ולכן מפריכה טענה.

- דוגמה שאינה מקיימת את התנאים של טענה איננה רלוונטית, וחשוב שתלמידים ידעו להבחין בינה לבין דוגמאות תומכות ודוגמאות נגדיות. ניתן להשיג זאת באמצעות שיפוט של דוגמאות, הן כאלו שתלמידים יוצרים במהלך דיון והן דוגמאות מוכנות.

12. לצד הדיון בטענות כלליות (טענות "לכל") יש לדון גם בטענות קיום שכדי להוכיח אותן מספיקה דוגמה אחת וכן בטענות המתייחסות למספר סופי של מקרים אותן ניתן להוכיח באמצעות בדיקת כל המקרים האפשריים.
13. רצוי להוכיח טענות בדרכים שונות במקרים שניתן ולהדגים בכך שאפשר ללמוד על מגוון שיקולים וקשרים מהוכחות שונות. יש לעודד תלמידים לחפש הוכחות אחרות, למשל הוכחות שנעשה בהן שימוש בסימטריה – שיקוף ו/או סיבוב.
14. אמנם לכל הטענות שבתוכנית הלימודים יש הוכחות. יחד עם זאת לא ניתן להוכיח הכל במסגרת מספר השעות שעומדות לרשות לימודי המתמטיקה ובמסגרת המושגים המוכרים לתלמידים (למשל, התלמידים לא מכירים את ההגדרה הפורמלית של מושג הגבול). ההחלטה אם להוכיח טענה מסוימת או לא עשויה להיות מבוססת על חשיבות הטענה (למשל המשפט היסודי של האנליזה) וכן על היותה מסבירה או לא (ראו סעיף 2).
במקרים בהם לא מוכיחים טענה חשוב:

- לציין את העובדה שההוכחה קיימת

- להסביר מדוע לא הוכחנו (למשל: כאשר הכלים להוכחה אינם בהישג ידם של התלמידים או בגלל דמיון להוכחות שכבר הוצגו)

- חשוב גם לציין מקרים בהם הנימוק המצופה מתלמידים אינו מהווה הוכחה (למשל במקרה שמזהים אסימפטוטות בדרכים אמפיריות).

- להפנות תלמידים מתעניינים למקורות בהם מופיעה ההוכחה.

הערה: רצוי להפנות תלמידים מתעניינים לספרות בנושא מקומה של ההוכחה מתמטיקה מודרנית (בתחילת המאה ה-20 הילברט (Hilbert) סבר שניתן להוכיח או להפריך כל טענה וטענה במתמטיקה, אולם גדל (Gödel) הראה שאין זה כך), ולספרות המדגישה את העובדה שהמתמטיקה היא תחום הממשיך להתפתח כל העת, וטענות שהיו בגדר השערה משנות את מעמדן והופכות למשפטים מוכחים או לטענות שהופרכו.

נספח 2: דוגמאות לשאלות על פי נושאי הלימוד

הדוגמאות מסמנות יעדים ומדגימות פעילויות שתואמות את הדגשים בתוכנית החדשה ואת הערך המוסף שלה.

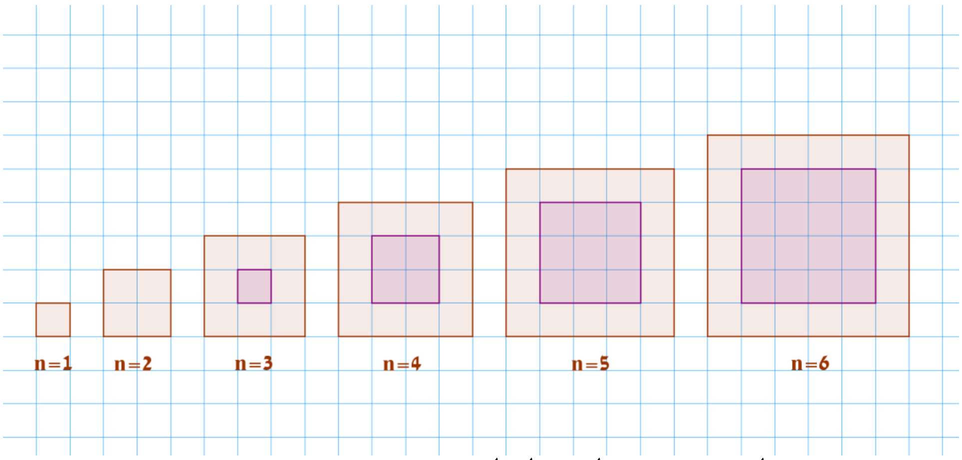
שוב נדגיש כי דוגמאות ו/או נושאים המצוינים **כהעשרה** לא ייכללו כנושאי חובה בתוכנית, אך מצופה מהמורים להכירם ולהפנות את התלמידים המתעניינים לקריאה עליהם בספרי הלימוד ובחומרי ההעשרה נוספים.

כהעשרה מתמטית, תרבותית ומדעית, כמצוין בכמה דוגמאות, כדאי להפנות את התלמידים לקריאה על דמויות מרכזיות בפיתוח המתמטיקה הנלמדת, על התחומים שפיתחו וחשיבותם. רשימת המתמטיקאים/ המדענים שכדאי שיכירו את תרומתם : אוקלידס, דקארט, ניוטון, לייבניץ, הילברט, גדל, גלואה, פואנקרה, ברנולי, גאוס, פון-ניומן, פורייה, פרמה, ווילס, סמייל ועוד.

חשוב לציין שבנוסף לתרגילים המוצעים ברוח התוכנית, יש לכלול תרגילים רגילים שיתרמו להבנה ולשליטה בחומר ויפתחו את היכולות הטכניות של התלמידים בהדרגה. בדרך זו הם יוכלו להתמודד עם רמת המורכבות בדוגמאות הנתונות (אין צורך לכלול תרגילים מאוד טכניים ברמת מורכבות גבוהה באופן משמעותי מהדוגמאות המובאות).

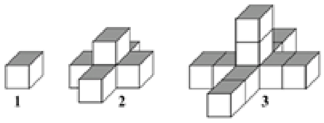
אינדוקציה מתמטית וסדרות

מבוא לסדרות



1. השאלות מתייחסות לאיור לעיל.
כמה משבצות a_n יש לצבוע במסגרת הריבוע שאורכו n משבצות?
כמה משבצות b_n (כפונקציה של n) יש לצבוע אם צובעים רק את פנים הריבוע?
כִּתבו עבור כל סדרה נוסחה לפי מקום (רצוי לפתח כל נוסחה בכמה דרכים).
ערכו טבלה לערכי הסדרות עבור עשרת הערכים הראשונים (כדאי להשתמש בגיליון אלקטרוני).
הציגו את ערכי הסדרות כגרף של a_n לעומת n.
האם הסדרות עולות/ יורדות/ משתנות? (אתגר : מה קצב העלייה?)

2. השאלות מתייחסות לאיור שלהלן.
כמה קוביות נוספו במעבר מהערמה הראשונה לשנייה?
כמה קוביות נוספו במעבר מהערמה השנייה לשלישית?



ציירו את הערמה הרביעית. מהו כלל הנסיגה? מהי הנוסחה לפי מקום?
כמה קוביות יש בערמה שנמצאת במקום ה-23? (רצוי להשתמש בגיליון אלקטרוני לחישוב)
האם קיימת ערמה שיש בה 16 קוביות? אם כן, מה המיקום שלה?

3. שאלות לגבי נוסחת מקום או כלל הנסיגה עבור דוגמאות נוספות, למשל אלו המוצגות בקישורים:

- [מאגר תבניות בתמונות]
- [המלך מתיא]

4. דוגמה יישומית: גרף המייצג נתונים של ריכוז חיידקים במשטח גרון עם מדידות בכל שעה מהווה סדרה שיודעים להגדיר את החוקיות שלה בקירוב (נדון בכך בהמשך). התחזית מתי הריכוז עובר את סף המינימום לגילוי במכשיר המעבדה של קופת חולים מגדירה מתי יימסרו לכם תוצאות המעבדה.

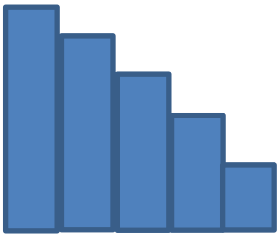
5. העשרה - הצגת דוגמאות ואי-דוגמאות לחידוד הנושא של הגדרת סדרה וההבדל (העדין!) בין אי-ידיעת החוקיות הדטרמיניסטית לבין סדרות אקראיות:

- אי-דוגמה: גרף המייצג נתונים של ריכוז החיידקים במשטח גרון עם מדידות בכל שעה של **מספר חולים יחד**, ייתן בדרך כלל מספר ריכוזים בכל שעה. אם כל הנתונים מוצגים יחד, הרי אין זו סדרה (לכלל n יש כמה ריכוזים אפשריים).
- דוגמאות לסדרות שהחוקיות בהן לא דטרמיניסטית (ולכן לא יידונו בתוכנית): אדם בוחר בכל יום n כמה קילומטרים ירוץ a_n על פי הטלת קובייה. מכאן שאין קשר בין הערך a_n לערך a_{n+1} או לערך של n: הסדרה המתקבלת היא סדרה אקראית, סדרה שאיבריה נקבעים על פי חוקים הסתברותיים.

סדרות חשבוניות

1. בכל שורה באולם קולנוע יש חמישה מושבים יותר מאשר בשורה הקודמת. בשורה הראשונה יש עשרים מושבים. כמה שורות יש באולם אם נתון שהקיבולת המרבית שלו היא 1,125 אנשים?
2. בעיות שכר/השקעה למיניהן (גם כהכנה להשוואה עם סדרות הנדסיות): הציעו לך משכורת התחלתית של 4000 ₪ לחודש, והבטיחו שכל חודש יעלו את המשכורת ב-20 ₪ (0.5% מהמשכורת ההתחלתית). כעבור כמה חודשים תגיע המשכורת החודשית ל-5,000 ₪? כעבור כמה חודשים המשכורת תהיה כפולה מהמשכורת ההתחלתית? כמה תרוויחו בשנת עבודה? (רצוי שימוש באקסל).
3. מהו סכום המספרים הזוגיים שבין 1 ל-100? מהו סכום המספרים באותו תחום שמתחלקים ל-3 ושאלות דומות. קראו על התלמיד גאוס בוויקיפדיה /באנציקלופדיה. מי היה גאוס? באיזו מאה חי? מה היו תרומותיו החשובות למדע ולמתמטיקה?

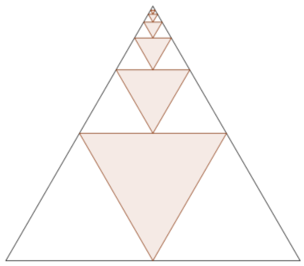
4. מדרגות למיניהן: קבלן בנה גרם מדרגות שגובה כל מדרגה בו (לפי חוקי הבנייה) 17.5 ס"מ ועומקה 26 ס"מ. יש לצבוע את הקיר התומך בגרם המדרגות (ראו איור), ולשם כך יש לחשב את שטחו:
מהו שטח הקיר התומך אם בגרם המדרגות יש 5 מדרגות? 15 מדרגות? מה הקשר לנוסחת הסכום של הסדרה? הציגו את הסדרה כגרף והציגו את התוצאה בצורה גרפית.

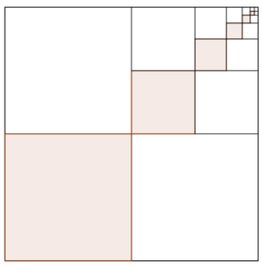


5. נסמן ב-a_n איבר כללי של סדרה חשבונית. שערו האם הסדרות $a_{n+3}, a_{2n}, 3a_n, a_n+2$, הן גם סדרות חשבוניות? הוכיחו את השערתכם (כאן המקום להסביר שכדי להוכיח שהסדרה חשבונית, יש להראות שההפרש בין כל שני איברים עוקבים קבוע, בעוד שעבור ההוכחה שהסדרה אינה חשבונית מספיק להראות ששני הפרשים מסוימים אינם שווים; ראו דגשים).
בחרו דוגמה פרטית לסדרה חשבונית a_n והציגו את האיברים השונים עבור $n=1,..10$ בצורה גרפית וכטבלה (רצוי בגיליון אלקטרוני).

סדרות הנדסיות

1. מצאו את סכומי השטחים של המשולשים והמרובעים הצבועים שבסרטוטים שלהלן.





2. ראו גם הפיצוח: סדרה הנדסית מתכנסת
3. ראו גם הפיצוח: תמונות מספרות על סכום -הוכחות ויזואליות של סכום סדרה חשבונית וסדרה הנדסית.

4. סיפור המלך והאורז על לוח השחמט (ראו למשל קישור לפיצוח עם יישום של גליון אלקטרוני: אגדה של פונקציה
5. חידת הזבוב ופתרונו של פון-נוימן (חפשו במרשתת). מי היה פון-נוימן? באיזו מאה הוא חי? מה היו תרומותיו החשובות למדע ולמתמטיקה?
6. שאלות בנושא אינפלציה וריבית דריבית (ראו למשל **עלייה במחירי הדירות**
7. בעיות שכר/השקעה למיניהן (השוואה עם סדרות חשבוניות):
8. הציעו לך משכורת התחלתית של 04,00 ₪ לחודש, והבטיחו שכל חודש יעלו את המשכורת ב- 0.25%. מה תהיה תוספת השכר בחודש השני, השלישי, הרביעי? כעבור כמה חודשים תגיע המשכורת החודשית ל-5,000 ₪? כעבור כמה חודשים תהיה המשכורת כפולה מהמשכורת ההתחלתית? כמה תרוויח בשנת עבודה? איזו הצעה עדיפה: העלאת שכר חשבונית של 20 ₪

בחודש או העלאה הנדסית של 0.25%? (השוואה למשל לדוגמה למעלה, דיון על פרק הזמן הנידון).

9. גידול אוכלוסיות : למשל, משטח הגרון שהוזכר בפרק הראשון ; **אני ואתה נשנה את העולם** הכולל יישום של גיליון אלקטרוני ; **מרוב עצים לא רואים את היער...**

10. "השירה היא האמנות לקרוא לאותו עצם בשמות שונים. המתמטיקה היא האמנות לקרוא לעצמים רבים באותו השם" (פואנקרה). תן דוגמה לשתי בעיות שונות שאותה סדרה ואותה מתמטיקה יכולה לשמש לייצוג. מי היה פואנקרה? באיזו מאה חי ומה היו תרומותיו העיקריות למדע ולמתמטיקה?

11. a_n הוא איבר כללי של סדרה הנדסית. שערו האם הסדרות a_{n+3}, a_{2n}, $3a_n$, a_n+2, הן גם הן סדרות הנדסיות.
הוכיחו את השערתכם (כאן המקום להסביר שכדי להוכיח שהסדרה הנדסית יש להראות שהמנה של כל שני איברים עוקבים קבועה, בעוד שעבור ההוכחה שהסדרה לא הנדסית מספיק להראות ששתי מנות מסוימות אינן שוות ; ראו דגשים).
בחרו דוגמה והציגו את הסדרות השונות עבור n=1,..10 בצורה גרפית וכטבלה (רצוי בגיליון אלקטרוני).

12. העשרה : כל מספר רציונלי ניתן להצגה עשרונית. ההצגה העשרונית יכולה להיות סופית או אינסופית.

13. העשרה : הוכיחו כי אם המכנה של המספר הרציונלי מתפרק לגורמים ראשוניים שאינם רק 2 ו-5 אזי הייצוג העשרוני שלו היה אינסופי והחל מספרה מסוימת מחזורי.

14. העשרה : מצאו את המספרים הרציונליים שאלה הצגותיהן העשרוניות האינסופיות :

- $0.16\underline{66}$
- $0.\underline{33}$
- $0.12\underline{56}$
- $0.\underline{1256}$

15. העשרה : הצגה בינארית של מספרים כהכללה להצגה העשרונית ושימושיה במדעי המחשב.

16. העשרה : שימושים של ההצגה הבינארית בייצוג תמונות דיגיטלי

דוגמאות משאלות בגרות

17. בגרות חורף תשע"ו

בסדרה שכל איבריה שונים מאפס ומאחד נתון כי סכום של כל שני איברים עוקבים שווה למכפלתם.
א. מצא נוסחת נסיגה המביעה את a_{n+1} באמצעות a_n.
ב. הוכח כי עבור כל n טבעי מתקיים: $a_{n+2} = a_n$.
ג. נתון כי $a_{31} = 3$, n הוא מספר זוגי.
מצא נוסחה לסכום n האיברים הראשונים בסדרה.

18. בגרות קיץ תשע"ד

בסדרה חשבונית יש $3n$ איברים.

סכום n האיברים האחרונים גדול פי 2 מסכום n האיברים הקודמים להם.

א. הוכח שסכום n האיברים הראשונים הוא 0.

ב. נתון גם שסכום האיברים החמישי והשביעי הוא 0.

סכום כל איברי הסדרה הוא 726.

מצא את הפרש הסדרה.

אפשר לפתור (באופן עקרוני) בשתי דרכים: האחת לרשום באופן ישיר את הנתונים באמצעות שני משתנים a_1 ו- d, ולזהות את התבנית שמתקבלת בסופו של דבר כ- $S_n=0$. האפשרות השנייה היא להסתמך על כך שבסדרה בת $3n$ איברים סכום n האיברים שבאמצע הוא הממוצע החשבוני של הסכומים של n האיברים הראשונים והאחרונים (טענה שאם רוצים להשתמש בה צריך להוכיחה). זה מסוג התרגילים שאפשר לדון בהם ולהרחיבם במסגרת כיתתית אך לא במסגרת של בחינה.

19. בגרות חורף תשע"ה

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל:

$$a_1 = 4$$

$$a_n + a_{n+1} = 4n + 2$$

א. אם בסדרה יש 100 איברים, מצא את הסכום של שני האיברים העומדים במקומות האמצעיים בסדרה.

ב. הוכח כי איברי הסדרה העומדים במקומות אי־זוגיים מהווים סדרה חשבונית, וגם איברי הסדרה העומדים במקומות זוגיים מהווים סדרה חשבונית.

אם בסדרה יש 101 איברים, מצא:

ג. את האיבר העומד באמצע הסדרה.

ד. את הסכום של כל איברי הסדרה.

20. בגרות חורף תשע"ד

נתונה סדרה הנדסית אין־סופית יורדת: $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ a_4\ ,\ \dots$

סכום כל איברי הסדרה בלי האיבר הראשון הוא 6.

מחליפים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה,

ומתקבלת סדרה הנדסית חדשה: $a_1\ ,\ -a_2\ ,\ a_3\ ,\ -a_4\ ,\ \dots$

סכום כל איברי הסדרה החדשה בלי האיבר הראשון הוא -3.

מהאיברים של הסדרה הנתונה בנו סדרה שלישית: $\frac{1}{a_2}\ ,\ \frac{1}{a_3}\ ,\ \frac{1}{a_4}\ ,\ \dots$

א. הוכח כי הסדרה השלישית היא סדרה הנדסית.

ב. נתון כי סכום n האיברים הראשונים בסדרה השלישית הוא 273.25.

מצא את n.

21. קבוצת קנטור

נבנה קבוצה של קטעים באופן האיטרטיבי הבא: ניקח את הקטע [0,1] מהישר הממשי. בשלב הראשון נסיר ממנו קטע פתוח שהוא השליש האמצעי של הקטע הנתון. בשלב השני נסיר קטעים פתוחים שהם השליש האמצעי משני הקטעים שנותרו. בכל שלב, נסיר קטעים פתוחים שהם השליש האמצעי מכל הקטעים שנותרו בשלב הקודם. קבוצת קנטור היא קבוצת כל הנקודות שלא הוסרו בתהליך האינסופי שתואר לעיל. להלן מודגמים שלושת הצעדים הראשונים.

1. נסמן ב a_n את מספר הקטעים שהוסרו. הגדירו את a_n באמצעות כלל נסיגה. מצאו ל-a_n נוסחה לפי מקום.
2. נסמן ב b_n את מספר הקטעים שנשארו. הגדירו את b_n באמצעות כלל נסיגה. מצאו ל-b_n נוסחה לפי מקום.
3. מהו אורך קטע שהוסר בשלב ה-n?
4. מהו סכום כל האורכים שהוסרו בשלב ה-n ?
5. למה שואף סכום זה כאשר n שואף לאינסוף?

אינדוקציה מתמטית ושימושיה

דוגמאות:

דוגמאות פשוטות להוכחה באינדוקציה

1. חישוב סכום ריבועים של n מספרים טבעיים.
הוכחה באינדוקציה של הטענה:

$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$ ניתן לשלב עם הוכחה ויזואלית. ראו מאמר מתוך עלי"ה מאת אהוד לם

2. הוכחת כלל הגזירה $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$ לכל n טבעי, תוך שימוש בכלל המכפלה ובאינדוקציה מתמטית.

3. נתונות שתי סדרות: $a_n = n^2 + 2n$, $b_{n+1} = b_n + 2n + 2$ ו- $b_1 = 3$.

האם $a_1 = b_1$?

האם $a_2 = b_2$?

האם $a_5 = b_5$?

האם הסדרות שוות לכל n טבעי?

כיצד ניתן להוכיח כי לכל n טבעי מתקיים $a_n = b_n$?

הוכחה:

שלב א (בסיס)

בדקנו ומצאנו שכאשר n=1מתקיים השוויון בין איברי הסדרות: $a_1 = b_1 = 3$

שלב ב (צעד)

נוכיח שאם מתקיים שוויון בין איברי הסדרות במקום מסוים k (k מספר טבעי כלשהו) אז גם האיברים העוקבים של שתי הסדרות שווים זה לזה.

הנחה: האיברים של שתי הסדרות במקום k כלשהו שווים זה לזה, כלומר $b_k = a_k$.

צ.ל. (בשלב הצעד) האיברים במקומות העוקבים שווים גם הם, כלומר $b_{k+1} = a_{k+1}$

הוכחה:

$$b_{k+1} \underbrace{=}_{\text{לפי כלל הנסיגה}} b_k + 2k + 3 \underbrace{=}_{\text{לפי ההנחה}} a_k + 2k + 3 = \underbrace{k^2 + 2k}_{a_k \text{ לפי הגדרת}} + 2k + 3$$

$$= k^2 + 4k + 3 = (k+1)^2 + 2(k+1) = a_{k+1}$$

סיכום: הראינו שהאיברים הראשונים של שתי הסדרות שווים, והוכחנו שאם איברי שתי הסדרות שווים במקום כלשהו אז גם האיברים העוקבים שווים בשתי הסדרות. בכך הוכחנו, על פי עיקרון האינדוקציה, שלכלn טבעי מתקיים, $b_n = a_n$.

4. דוגמאות לשימוש לא תקין במהלך האינדוקטיבי:

1. השמטת שלב הבסיס:

*נתונות שתי סדרות b_n, a_n המוגדרות על ידי אותו כלל נסיגה בדיוק (למשל: $a_{n+1} = a_n + 2,\ b_{n+1} = b_n + 2$) אך האיבר הראשון שלהן שונה.

- הראו ששלב הצעד מתקיים ושלב הבסיס איננו מתקיים.
- מתי (כלומר עבור איזה כלל נסיגה) תתקבלנה שתי סדרות שונות?
- הראו דוגמא בה שתי הסדרות הן פשוט הזזה במקום (למשל $a_{n+1} = b_n$)
- הראו דוגמא בה אין לסדרות אף איבר משותף

*נתונות שתי סדרות: סדרת הסכומים החלקיים $a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ והסדרה $b_n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$. אם נניח כי עבור k כלשהו מתקיים $a_k = b_k$ נוכל בלי קושי רב להסיק כי $a_{k+1} = b_{k+1}$ יחד עם זאת אין די בכך כדי להראות שוויון בין הסדרות.

2. השמטת שלב הצעד:

העובדה שתחילתן של שתי סדרות נראית אותו הדבר אינה מעידה שהן אותה סדרה.
נתונות שתי הסדרות: $a_{n+1} = 2a_n$, $b_{n+1} = b_n + 2na_{n+1}$ ו- $a_1 = b_1 = 2$. הראו כי $a_k = b_k$ עבור $k = 1,2,3$ אך לא עבור k גדול יותר.

3. מקרים יותר מתוחכמים בהם איתור השגיאה יותר עדין (למשל במעבר הספציפי, הבלתי אפשרי, בין פריט בודד לשניים) יוצגו כנושאי העשרה ודיון. למשל, "פרדוקס" הסוסים של פוייה (George Polya 1887-1985) – נוכיח באינדוקציה כי לכל הסוסים יש אותו צבע. נבצע את האינדוקציה על גודלה של קבוצת הסוסים. שלב הבסיס - אם נתבונן על קבוצה שבה סוס אחד, אזי ברור כי לכל הסוסים בקבוצה יש אותו הצבע. שלב הצעד - נניח שבכל קבוצה שבה יש n סוסים הצבע של כל הסוסים בקבוצה זהה. נוכיח כעת באמצעות ההנחה כי בקבוצה בה יש n+1 סוסים לכל הסוסים יש אותו צבע. בהינתן קבוצה בת n+1 סוסים, נבחר תת-קבוצה בת n סוסים. על פי הנחת האינדוקציה, כל הסוסים בתת-קבוצה זו הם בעלי אותו צבע. אם ניקח תת-קבוצה נוספת בת n סוסים השונה מתת הקבוצה הקודמת, נסיק שוב את אותה מסקנה כי כל הסוסים בה בעלי אותו צבע. לפיכך, נוכל להסיק כי כל n+1 הסוסים בקבוצה הם באותו צבע. איפה הכשל אפשר ללמוד בקישור הבא.

[מאמר יפה על אינדוקציה שבסופו התייחסות ל"פרדוקס" לעיל מבית מדרשו של גדי אלכסנדרוביץ' כותב הבלוג "לא מדויק".]

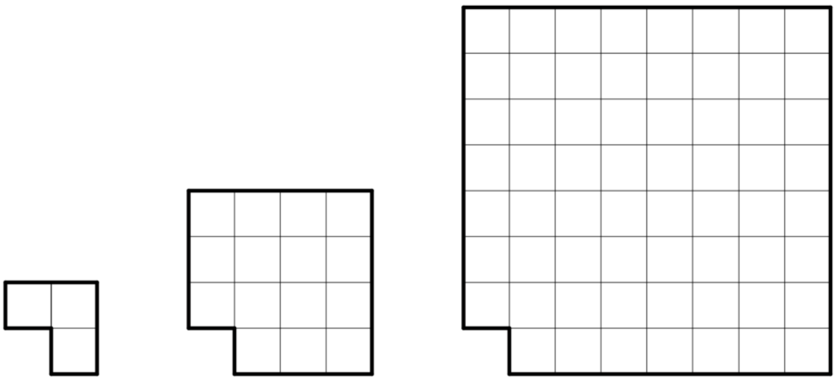
דוגמאות לבעיות חלוקה:

5. הוכח כי כל איברי הסדרה

$\{a_1 = 6 \; a_{n+1} = a_n + 2n^3 + 3n^2 + n$ מתחלקים ב-6 ללא שארית

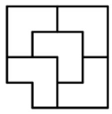
דוגמאות ויזואליות להוכחה באינדוקציה

6. נתונה סדרה של לוחות של ריבועים חסרים באורך 2^n משבצות (כך שהריבוע השמאלי התחתון בהם חסר). להלן שלושת הלוחות הראשונים בסדרה:



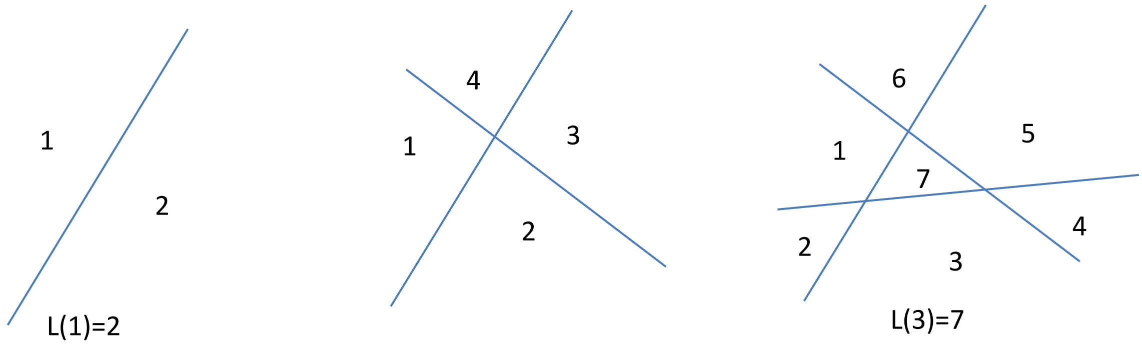
$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$

1. האם אפשר לרצף בשלמות את הלוח השני באמצעות הלוח הראשון? להמחשה, להלן הריצוף של הלוח השני.



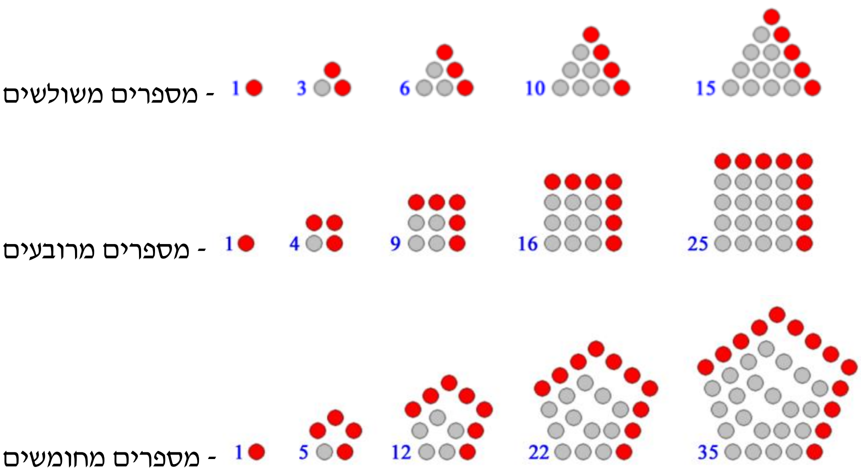
2. האם אפשר לרצף את הלוח השלישי באמצעות הלוח הראשון? (האם אפשר לשם כך להיעזר בריצוף שמצאנו עבור הלוח השני?)
3. אילו היינו יודעים לרצף באמצעות הלוח הראשון ריבוע חסר שאורכו 5 משבצות, האם יכולנו לרצף ריבוע חסר שאורכו 10 משבצות?
4. אילו ריבועים חסרים ניתן לרצף בעזרת הלוח הראשון?

7. נסמן ב-L(n) את מספר חלקי המישור המתקבלים מהעברת n ישרים במישור כך שאף שניים מהם אינם מקבילים ואף שלושה עוברים בנקודה אחת.



1. מצאו כמה חלקי מישור מתקבלים מהעברת 4 ישרים באופן זה.
   שימו לב כמה מישורים התווספו.
2. מצאו כלל נסיגה המתארת את מספר חלקי המישור המתקבלים מהעברת n ישרים במישור.
   נמקו תשובתכם.
   [תשובה - $L(n) = L(n-1) + n$, הוספת הישר ה-n מוסיפה n חלקי מישור]
3. הוכיחו באינדוקציה, או בדרך אחרת, כי הכלל לפי מקום הוא:
   $$L(n) = 1 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

8. מספרים מצולעים – הם מספרים שניתן להציג אותם בעזרת מצולע משוכלל.
   1. מצאו כלל נסיגה המתאר את המספר המשולש/המרובע/המחומש ה-n. נמקו תשובתכם.
   2. מצאו כלל לפי מקום והוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת.



תמונות מתוך - https://en.wikipedia.org/wiki/Polygonal_number

הערה: **פרויקט לתלמידים 28 - מספרים מצולעים** – מחר 98

הערה: משולש סרפינסקי

על קישוריות בין התחומים

9. **סדרות, אינדוקציה ונוסחאות נסיגה: הזדמנות לקישוריות בין תחומים במתמטיקה - חלק א'**, **חלק ב'**- חמוטל דוד, על"ה 32, 33

מבוא לחשיבה רקורסיבית

10. שלש בעיות שונות שאפשר לפתור באמצעות אותה מתמטיקה
11. תמונות מספרות על סכום

על הקושי העקרוני למצוא נוסחה לפי מקום לסדרה המוגדרת באמצעות כלל נסיגה

12. נתונה נוסחת נסיגה שמתארת התפתחות של אוכלוסייה בסביבה מסוימת $b_{n+1} = rb_n(1 - b_n)$. בחרו את b_1 מתוך האינטרוול (0,1) ואת הפרמטר r מתוך האינטרוול (3,4). רשמו את עשרת האיברים הראשונים בסדרה. האם אתם מזהים תבנית שיטתית? בנו תוכנית בגיליון אלקטרוני שתחשב את 100 האיברים הראשונים בסדרה. האם כעת ניתן לזהות תבנית שיטתית?

(הערה: ראו קישור (https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map

טקסטים להעשרה

13. **חתך הזהב**. מאמר מעל"ה מאת עופר ליבה
14. איך מוצאים את נוסחת פיבונאצ'י – גדי אלכסנדרוביץ' באתר "לא מדויק"

חשבון דיפרנציאלי

דוגמאות לנגזרת שנייה וקעירות של פונקציה

1. מדגימה תוכן: קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה:

מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה/מטה של $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 7$.

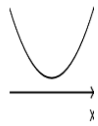
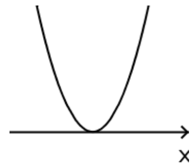
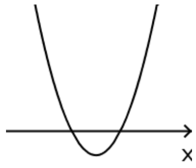
2. **מדגימה דגש**: בנקודת פיתול הנגזרת הראשונה יכולה לקבל כל ערך
מדגימה סוג משימה שבו מביאים דוגמאות "אם אפשר".

הביאו דוגמה לפונקציה עם נקודת פיתול שהנגזרת הראשונה בה חיובית.

1. דוגמה של גרף סכמתי.
2. דוגמה של פונקציה בייצוג אלגברי

3. **מדגימה חקירה חושפת תופעה, המבוססת על הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת.**

לפניכם שלוש פרבולות

 פרבולה ללא חיתוך עם ציר ה- x.	 פרבולה בעלת נקודת חיתוך אחת עם ציר ה- x (נקודת ההשקה).	 פרבולה בעלת שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x.

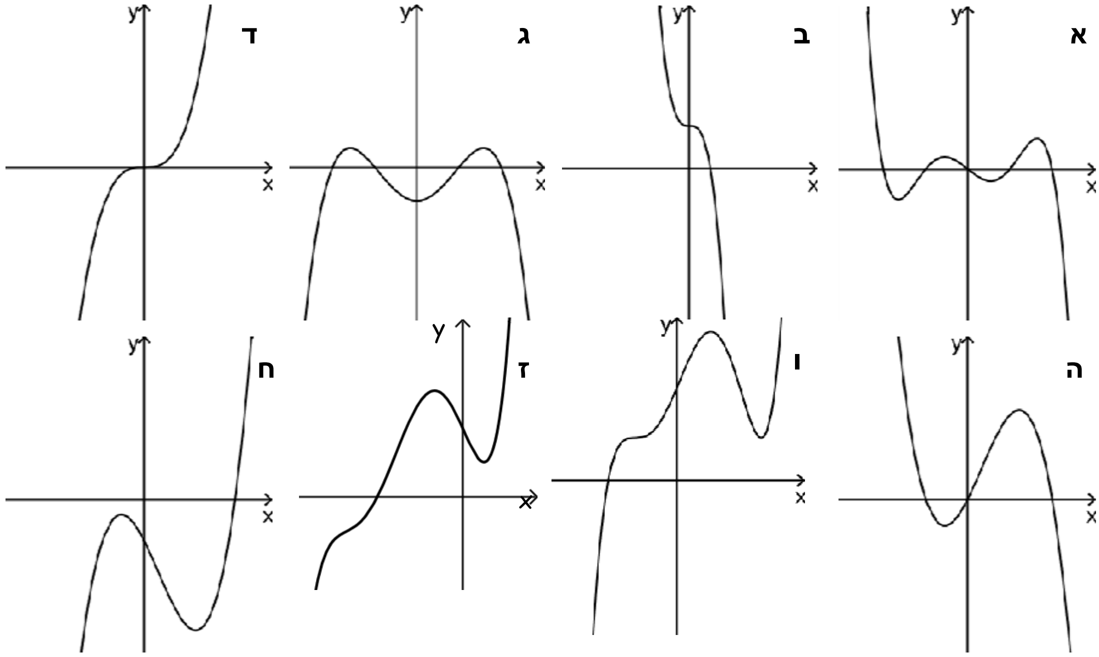
במה דומות הפונקציות ובמה שונות?

1. סרטטו את גרף הנגזרת של כל אחת מהפונקציות
2. סרטטו דוגמאות אפשריות לגרפים של פונקציות g_1, g_2 ו- g_3 המקיימות:

$$g_1'(x) = f_1(x), \quad g_3'(x) = f_3(x), \quad g_2'(x) = f_2(x)$$

3. לכל אחת מן הפונקציות ציינו את מספר נקודות הקיצון ואת מספר נקודות הפיתול של הפונקציה.
4. סרטטו 3 פרבולות בעלות מקסימום: (1) לפרבולה שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x. (2) לפרבולה נקודת חיתוך אחת עם ציר ה- x. (3) פרבולה ללא נקודות חיתוך עם ציר ה- x.
5. סרטטו שלושה גרפים של פונקציות ממעלה שלישית אשר הגרפים שסרטטתם בסעיף הקודם הם גרפים של הנגזרות שלהן. (כלומר הן הפונקציות הקדומות של הפרבולות)

6. האם הגרפים של הפונקציות הבאות יכולים לייצג פונקציות ממעלה שלישית? הסבירו.

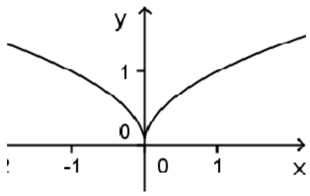


4. **מדגימה את המגמה לפתח הבנה מושגית של מושגים הקשורים בנגזרת.**
הסבירו מדוע, בנקודת מינימום שבה הנגזרת השנייה מוגדרת, הנגזרת השנייה איננה שלילית.

5.
   1. שרטטו את גרף הפונקציה $y = |x|$.
   2. מה ערך הנגזרת כאשר $x = 2.5$.
   3. מה ערך הנגזרת כאשר $x = -3$.
   4. סרטטו את גרף הנגזרת הראשונה של הפונקציה.

6. **מדגימה שאלה קצרה העוסקת בהתנהגות הפונקציה בנקודת אי הגדרה של הנגזרת הראשונה.**

התבוננו בגרף הפונקציה $h(x) = \sqrt{|x|}$.



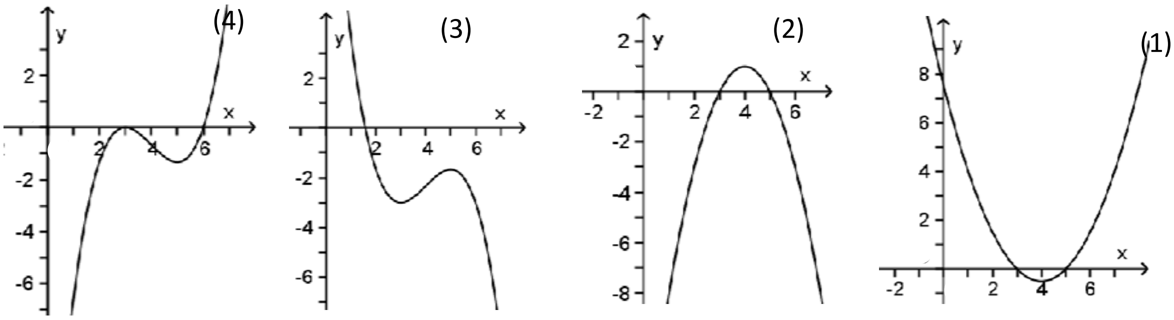
1. האם הנגזרת הראשונה מוגדרת כאשר $x = 0$?
2. סרטטו את גרף הנגזרת הראשונה.
3. האם יש לפונקציה נקודת קיצון כאשר $x = 0$?
4. האם יש לפונקציה נקודת פיתול כאשר $x = 0$?

מעובד מתוך: ללמוד וללמד אנליזה

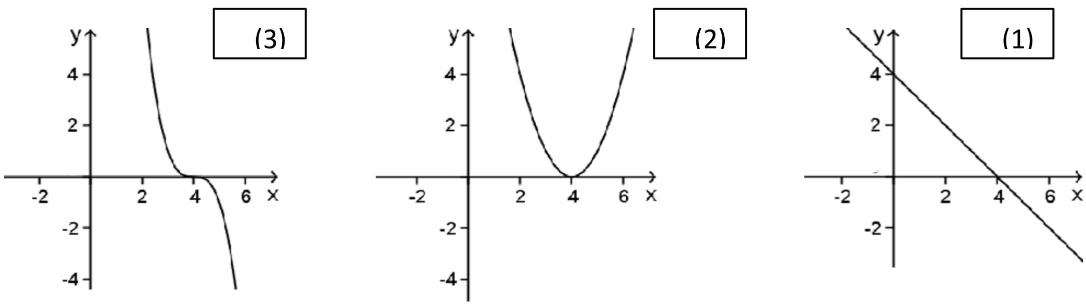
7. **מדגימה שאלה על קשרים בין הפונקציה לשתי נגזרותיה שניתנת באופן גרפי בלבד.** (מקור: ללמוד וללמד אנליזה)

הפונקציה $f(x)$ רציפה וגזירה פעמיים לכל x ממשי. נתון כי לפונקציה יש שתי נקודות קיצון בלבד: מינימום עבור $x = 3$, ומקסימום עבור $x = 5$.

א. איזה מן הגרפים הבאים יכול לתאר את גרף הפונקציה הנגזרת $f'(x)$. פרטו מגוון שיקולים בעזרתם ניתן להגיע למסקנה.



ב. קבעו איזה מבין הגרפים הבאים **אינו** יכול לתאר את גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$. פרטו מגוון שיקולים אפשריים.

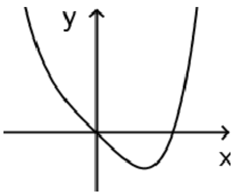


8. **מדגימה שאלה שחושפת תופעה.**

הוכיחו שלכל פונקציה ממעלה שלישית יש נקודת פיתול.

9. **מקור** : ללמוד וללמד אנליזה
מדגימה דגש : נקודת אפס של הנגזרת השנייה אינה בהכרח נקודת פיתול.

1. מצאו נקודות קיצון ונקודות פיתול של הפונקציה $f(x) = 2x^4 - x$.
2. מצאו נקודה שבה הנגזרת השנייה מתאפסת.
3. האם יש לפונקציה נקודות פיתול? הסבירו.
4. סרטטו גרף סכמתי של הפונקציה.



הערה : הנקודה שבה הנגזרת השנייה מתאפסת בשאלה זו אינה נקודת קיצון של הנגזרת הראשונה אלא נקודת פיתול.

שאלות מסוג זה יכולות להופיע עם או ללא סרטוט.

10. **מדגימה סידרת שאלות בנוסח** תמיד/ לפעמים/ אף פעם לא, את סוגי הנימוקים הנדרשים לכל אחת מהתשובות וכן שימוש בהוכחות בתחום האנליזה

בכל סעיף, בחרו את האפשרות הנכונה והוכיחו את טענתכם :

לפונקציה ממעלה שנייה יש נקודת פיתול – תמיד/ לפעמים/ אף פעם לא
לפונקציה ממעלה שלישית יש נקודת פיתול - תמיד/ לפעמים/ אף פעם לא
לפונקציה ממעלה רביעית יש נקודת פיתול - תמיד/ לפעמים/ אף פעם לא.

11. מדגימה משפחה של פונקציות. בכולן פיתול ומעברים בין סוגי קעירות, אך רק באחדות נקודות קיצון. מדגישה קיום של פיתול עם שיפוע אפס (פיתול "אופקי") ושיפוע שונה מאפס (פיתול "משופע"), בתוך רצף של אפשרויות. מקור : "ללמוד וללמד אנליזה" ו"להתחיל ברגל ימין".

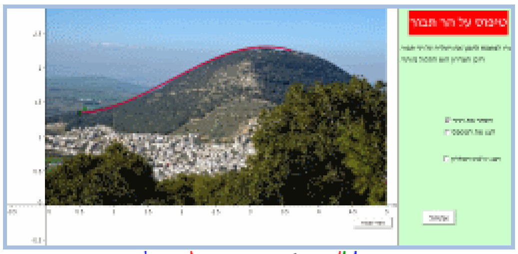
נתונות 3 פונקציות :

$$m(x) = x^3 - 5x^2 + 3x$$
$$k(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$
$$l(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$$

1. מצאו את תחומי העלייה הירידה, נקודות קיצון ונקודות פיתול, של כל אחת מן הפונקציות, וסרטטו גרף סכמתי.
2. הראו שלכל הפונקציות מהמשפחה $y = x^3 - ax^2 + 3x$ יש נקודת פיתול אחת.
3. מצאו :

- פונקציה נוספת מהמשפחה הנ"ל עם שתי נקודות קיצון ;
- פונקציה נוספת מהמשפחה הנ"ל שבה לנגזרת נקודת אפס יחידה שהיא נקודת פיתול ;
- פונקציה נוספת שבה הנגזרת לא מתאפסת באף נקודה.

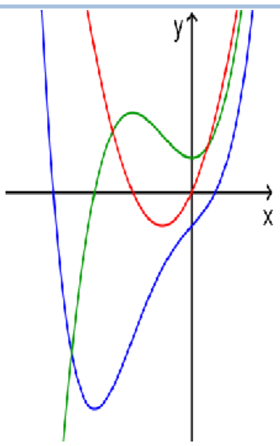
12. **מדגימה:** שימוש בטכנולוגיה, המחשה ויזואלית של השתנות קצב השינוי.



[במעלה הר תבור]

מקור: מאגר יישומונים דינאמיים. המרכז הארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי.

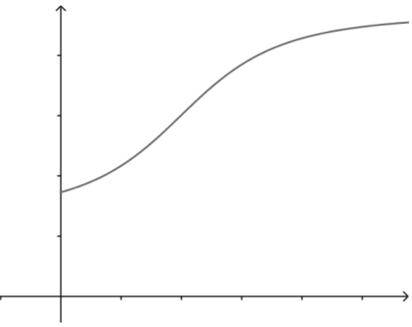
13. מדגימה שאלות זיהוי מי הפונקציה ומי הנגזרת.
מקור: מבוסס על ללמוד וללמד אנליזה.



באיור משמאל מופיעים גרפים של פונקציה, נגזרתה הראשונה ונגזרתה השנייה.

זהו מי מבין הפונקציות f, g ו-h היא הפונקציה המקורית, מי הנגזרת ומי הנגזרת השנייה. הסבירו את שיקוליכם. בהסבר עליכם להראות גם שלא יכולה להיות "היררכיה" אחרת מזו שתיארתם.

14. **מדגימה דיון בנגזרת השנייה בבעיות מציאותיות** .



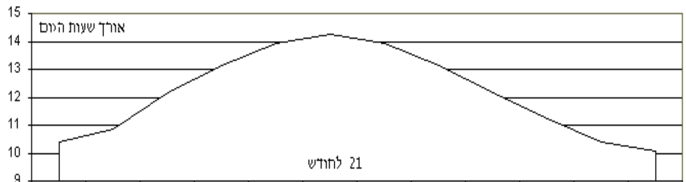
בדיון על עליית המחירים הוציא אחד הדוברים גרף והראה שהמחירים מתייקרים לאורך תקופה ארוכה.

משתתף אחר בדיון השתמש באותו הגרף וטען שהטיפול בעליית המחירים מוצלח, ואפשר לראות איך עליית המחירים נבלמת.

הסבירו את טענות שני הדוברים באמצעות הגרף.

15. **מדגימה דיון בנגזרת השנייה בבעיות מציאותיות**

הגרף הבא מראה את אורך שעות היום בתל אביב במהלך שנה.



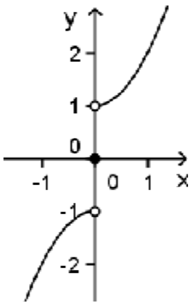
Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
10.39	10.84	12.17	13.16	13.93	14.25	13.94	13.15	12.17	11.21	10.39	10.05

1. באיזה פרק זמן אורך היום הולך וגדל?
2. מתי חל היום הארוך ביותר בשנה?
3. מתי אורך היום גדל בקצב המהיר ביותר?

הערשה: השאלות 17-21 **מדגימות דיון ברציפות וגזירות של פונקציה ללא הגדרה פורמלית של רציפות.**

17. **מדגימה שאלה קצרה העוסקת בהתנהגות הפונקציה בנקודת אי הגדרה של הנגזרת.**

נתונה הפונקציה:

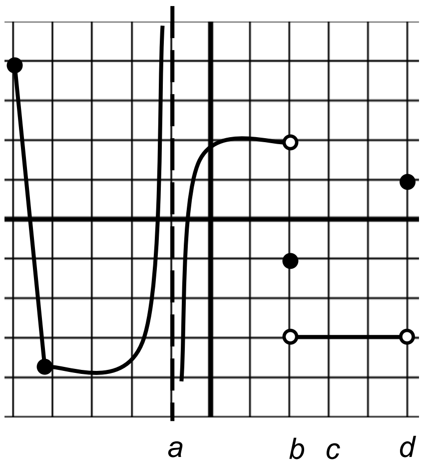


$$g(x) = \begin{cases} -x^2 - 1, & x < 0 \\ 0, x = 0 \\ x^2 + 1, x > 0 \end{cases}$$

1. סרטטו את גרף הנגזרת.
2. סרטטו את גרף הנגזרת השנייה

מעובד מתוך ללמוד וללמד אנליזה

18. מדגימה שאלות על רציפות וגזירות על פי מידע גרפי



התבוננו בגרף משמאל וענו:

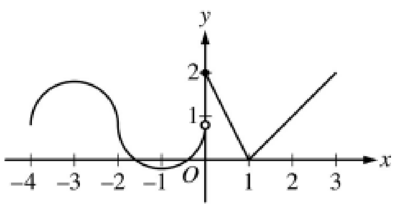
1. רשמו את התחומים החלקיים בהם הפונקציה רציפה.
2. ציינו נקודות בהן הפונקציה רציפה אך לא גזירה (אם יש כאלה).
3. ציינו ערכי x עבורם הפונקציה לא רציפה.

19. נתונה הפונקציה

: f(x)= {$2x-2$ $x<3$ כאשר $2x-4$ $x\geq 3$ כאשר

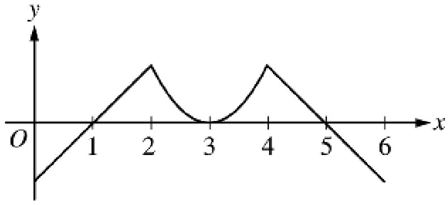
1. סרטטו את גרף הפונקציה.
2. סרטטו את גרף הנגזרת.
3. האם הפונקציה גזירה כאשר x=3? אם כן – מהו ערך הנגזרת בנקודה זו? אם לא – מדוע לא?

20. התבוננו בגרף הפונקציה f. לגרף יש משיק מאונך x=-2 ומשיקים אופקיים ב- x=-3 ו- x=-1. מהן כל הנקודות בהן f רציפה אך לא גזירה?



4. x=1
5. x=-2 ו- x=0.
6. x=-2 ו- x=1.
7. x=0 ו- x=1.

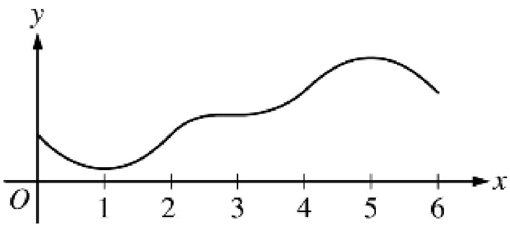
21. לפניכם גרף הנגזרת של פונקציה f.

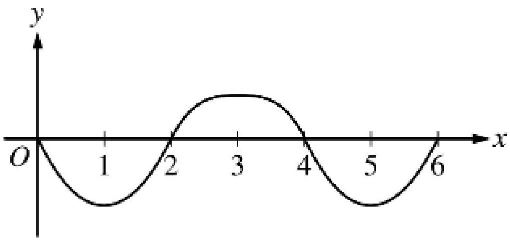


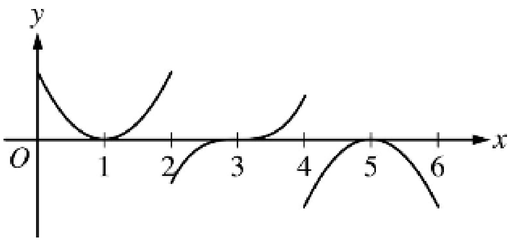
Graph of f'

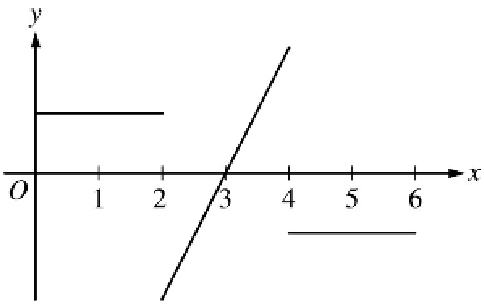
1. איזה מהגרפים הבאים יכול להיות הגרף של f?

ב. איזה מהגרפים הבאים יכול להיות הגרף של f''?

(A)


(B)


(C)


(D)


הדוגמאות האחרונות לקוחות ממבחני AP-

https://secure-media.collegeboard.org/digitalServices/pdf/ap/sample-questions-ap-calculus-ab-and-bc-exams.pdf

22. **מדגימה: סרטוט סקיצה אפשרית של גרף על פי תכונות, וזיהוי תכונות נוספות, כולל סוג הקעירות. ביצוע פעולות על גרף הפונקציה.**
מקור 35806 קיץ תשעה מועד ב

נתונה הפונקציה $f(x)$, ונתון כי כל אחת מהפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו־ $f''(x)$
מוגדרת בתחום $x > 0$.

נתון גם: הגרף של $f'(x)$ חותך את ציר ה־ x בנקודה שבה $x = 1$,
$f'(x)$ עולה בתחום $0 < x < 3$, ויורדת בתחום $x > 3$,
האסימפטוטות של $f'(x)$ הן $x = 0$ ו־ $y = 0$.

א. סרטט סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתון גם כי לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אחת שמשוואתה $x = 0$.

ב. מצא את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה),
וקבע את סוגן.

ג. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ד. הפונקציה $f(x)$ מקבלת את כל הערכים בטווח $y \geq 4$ ורק אותם.
סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
ציין על ציר ה־ x ועל ציר ה־ y את הערכים שמצאת.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = -[f(x)]^3$.
מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

23. בגרות קיץ תשע"ו

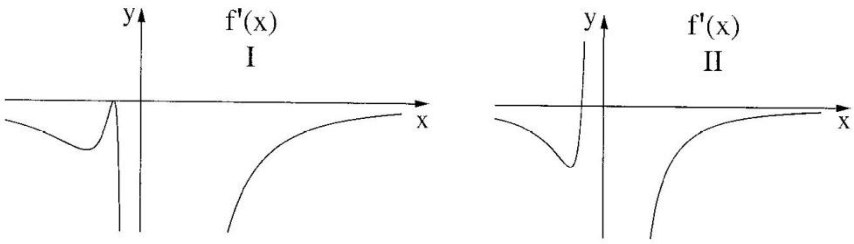
מדגימה אפשרות לשיקולים איכותניים הקשורים לתכונות של פונקציה מורכבת, ולקשר בין הפונקציה לנגזרת, כולל התייחסות לסוג הקעירות

נתונה הפונקציה $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$, $x \neq 0$. n הוא מספר טבעי גדול מ־ 1 .

א. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ב. הראה כי עבור n אי־זוגי $f'(x) \leq 0$ לכל $x \neq 0$.

לפניך שני גרפים, I ו־ II . (בגרפים מוצגות כל נקודות הקיצון.)



אחד הגרפים מייצג סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור n זוגי,

והגרף האחר מייצג סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור n אי־זוגי.

היעזר בגרפים I ו־ II , וענה על הסעיפים ג , ד , ו־ ה.

ג. עבור n אי־זוגי:

(1) מצא כמה נקודות קיצון (אם יש כאלה) יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

(2) מצא כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

ד. עבור n זוגי:

(1) מצא כמה נקודות קיצון (אם יש כאלה) יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

(2) מצא כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונות הפונקציות: $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^3$, $h(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$.

מהו הסימן של המכפלה $g''(x)\cdot h''(x)$ עבור $x>0$? נמק.

[קישור להרחבה של הבעיה באתר המרכז הארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי.]

24. מדגימה בעיה יישומית בנושא פונקציות רציונליות עם התייחסות לקצב שינוי, נקודת פיתול, ערך קיצון

נניח ש- $p(t)$ מודדת את השיעור היחסי של חמצן באגם, כאשר

$p(t) = 1$ משמעו רמה נורמלית (ללא זיהום), וככלל $0 \leq p(t) \leq 1$. הזמן t נמדד בשבועות, כאשר $t \geq 0$. בזמן $t = 0$ פסולת אורגנית נטמנת באגם, וכשחומרי הפסולת מתחמצנים שיעור רמת החמצן בו נתון על ידי

$p(t) = \frac{t^2-t+1}{t^2+1}$. $t > 0$,

1. מתי יהיה שיעור החמצן ברמה הנמוכה ביותר?
2. מתי יהיה קצב הגידול המהיר ביותר של החמצן במיכל?

מקור:

http://apcentral.collegeboard.com/apc/public/repository/AP_CM_Calculus_Extrema.pdf

25. מדגימה: שיקולים איכותניים של גורמים בריבוי זוגי ואי זוגי, גם בקביעת סימני הפונקציה, גם בקביעת סימני הנגזרת וגם בקביעת מיקום נקודת פיתול.

מבחינת טכניקה: יעילות זיהוי גורמים משותפים לפישוט הנגזרת.

בגרות קיץ תשע"ה

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{(x+2)^2}{(x-1)^3}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(4) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות פיתול בלבד.

על סמך הגרף של הפונקציה $f(x)$, ציין באיזה תחום נמצאת כל אחת מנקודות אלה.

ג. האם השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים,

גדול מ־ 4 , קטן מ־ 4 או שווה ל־ 4 ? נמק.

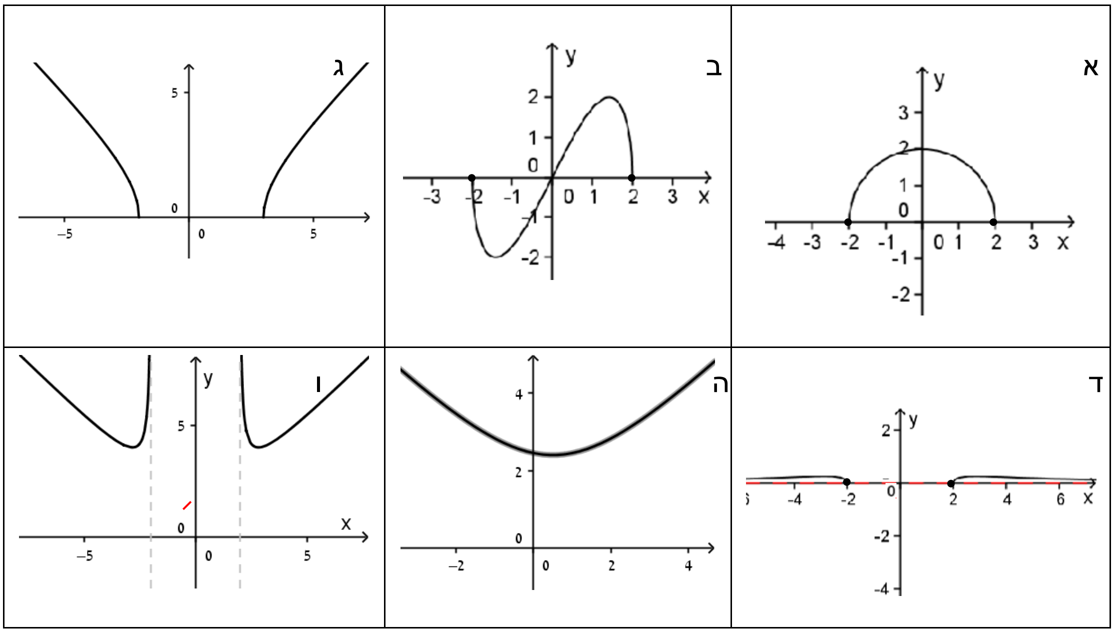
דוגמאות לנושא פונקציות עם שורשים

26. מדגימה דגש: זיהוי סקיצות של גרפים עוד לפני השימוש בנגזרת

מתוך: ללמוד וללמד אנליזה

לפניכם שש פונקציות ושישה גרפים. התאימו לכל פונקציה את הגרף המתאים לה.

3. $k(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$	2. $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$	1. $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$
6. $g(x) = \sqrt{x^2 - x + 6}$	5. $m(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$	4. $t(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}$



27. דוגמה לפעילות חקר עם שימוש בטכנולוגיה

[תחום ההגדרה של פונקציית שורש]

28. דוגמה לדגש: הדגשת הזהות: $\sqrt{x^2} = |x|$

נועם חקר את הפונקציה $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$.

כדי לחסוך את העבודה הכרוכה בגזירת מכפלה של פונקציות הוא רשם:

$$f(x) = x\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{x^2(4 - x^2)} = \sqrt{4x^2 - x^4}$$

וגזר את הפונקציה:

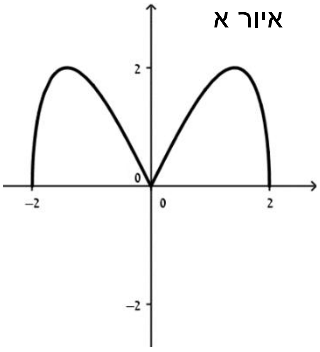
$$f'(x) = \frac{8x-4x^3}{2\sqrt{(4x^2-x^4)}} = \frac{4x(2-x^2)}{2\sqrt{x^2(4-x^2)}}$$

נועם הסיק שנקודות האפס של הנגזרת הן:

$$, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{2}.x_1 = -\sqrt{2}$$

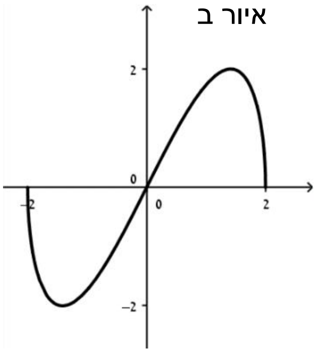
המשך חקירת הפונקציה הוביל אותו לסקיצה שבאיור א.

איור א



נועם סרטט את גרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ במחשב ולהפתעתו קיבל את הפונקציה שבאיור ב.

איור ב



ממה נובע ההבדל בין שני הגרפים?

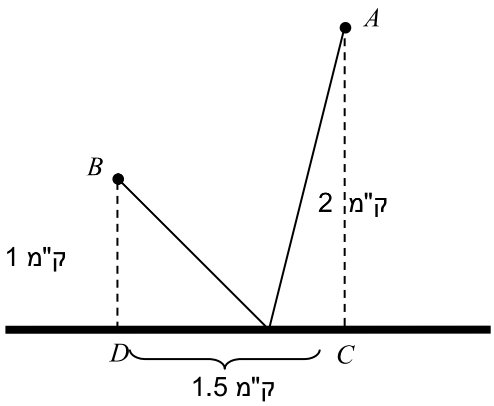
מעובד מתוך: ללמוד וללמד אנליזה

29. **מדגימה: בעיית ערך קיצון עם שורשים, מתאים לקשר לתופעה של החזרת אור על מראה מישורית (אפשר להרחיב את הדוגמה), ניתן לפתור גם באמצעות גאומטריה ללא אנליזה. שאלה הכוללת התייחסות למקסימום מוחלט בקצה התחום.**

בחופשת הקיץ הקימו תלמידי חוגי הסיירות של בית הספר "חולות נודדים" שני מחנות אוהלים, בשטח חולי מצדו האחד של כביש ישר. בערב הכינו המדריכים הפתעה והביאו לתלמידים כתב חידה למשחק. התלמידים צריכים לצאת ממחנה A, לרוץ לכביש אל מכונית המדריכים, לקחת את כתב החידה ולרוץ אתו למחנה B.

על-פי חוקי בית הספר אסור לתלמידים לצעוד אפילו מטר אחד לאורך הכביש, אלא בשטח החולי בלבד.

מחנה A ממוקם במרחק 2 ק"מ מהכביש, ומחנה B במרחק 1 ק"מ מהכביש. נסמן ב-C את הנקודה על הכביש הקרובה ביותר למחנה A. נסמן ב- D את הנקודה על הכביש הקרובה ביותר למחנה B. המדריכים יכולים לחנות רק בחלק הכביש שבין הנקודות D ו-C. המרחק, לאורך הכביש בין הנקודות C ו-D, הוא 1.5 ק"מ.



1. היכן צריכה מכונית המדריכים לעצור, כדי שמסלול הריצה יהיה הקצר ביותר האפשרי?
2. היכן צריכה מכונית המדריכים לעצור, כדי שמסלול הריצה יהיה הארוך ביותר האפשרי?

30. מדגימה פונקציה עם אסימפטוטות שונות באינסוף ובמינוס אינסוף.

מקור: 35806 מועד ב תשס"ה

7. נתונה פונקציית הנגזרת $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

הישר $y = \frac{1}{3}x + 3$ חותך את הגרף של הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 0$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ושל הפונקציה $f(x)$?

(2) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(6) הוסף לסקיצה שסרטטת בתת־סעיף ב (5) סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתונות שתי משוואות, I ו־ II: $\quad$ I. $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = k$ $\quad$, $\quad$ II. $\sqrt{x^2+9} = k$

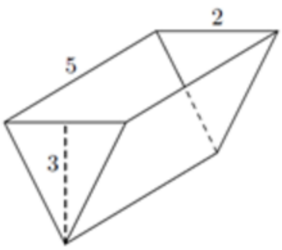
נתון כי $k > 0$.

מצא את תחום הערכים של k שעבורם

אין פתרון למשוואה I וגם אין פתרון למשוואה II.

31. **מדגימה שאלה מציאותית והתייחסות לקצב שינוי.**

ממיכל המים שבאיור מוזרמים מים החוצה בקצב של 2 מ"ק לדקה.



למיכל צורת מנסרה. אורך המיכל 5 מ'. בסיסי המנסרה הם משולשים שווי שוקיים בהם אורך הבסיס הוא 2 מ', וגובה המשולש 3 מ'. הפאה שממדיה 2מ'·5מ' מקבילה לקרקע (ראו איור).

בכל רגע נתון נסמן ב- v את כמות המים במיכל וב- h את עומק המים.

1. מה נפח המים כשהמיכל מלא?
2. מהו קצב השינוי של עומק המים ברגע שכמות המים מהווה רבע מקיבול המיכל?
3. מהו קצב השינוי של שטח פני המים כשכמות המים במיכל היא רבע מקיבול המיכל?

32. דגשים: תחום הגדרה, $\sqrt{x^2} = |x|$, שילוב שיקולים איכותניים. מקור: שאלון 35806 קיץ תשע"ד

נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

$g(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$

א. (1) לשתי הפונקציות יש אותו תחום הגדרה.

מצא את תחום ההגדרה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של כל אחת מהפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ עם הצירים.

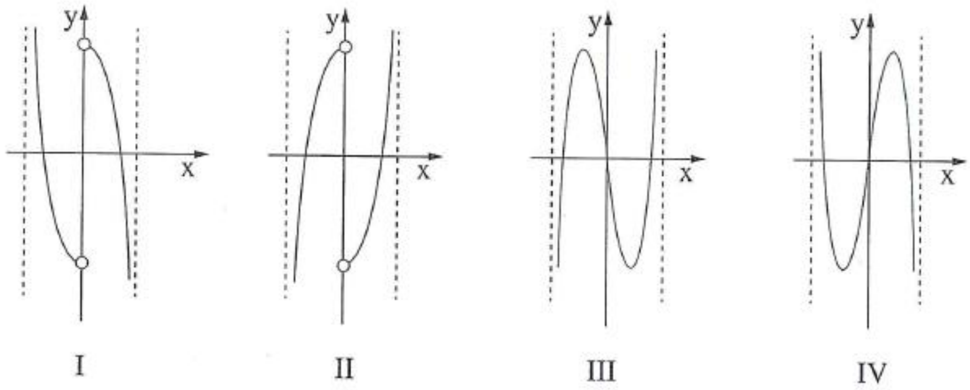
ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של כל אחת מהפונקציות, וקבע את סוגן.

ג. על פי הסעיפים א ו־ ב, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. לפניך ארבעה גרפים, IV-I.

איזה מהגרפים מתאר את פונקציית הנגזרת $g'(x)$? נמק.



דוגמאות לנושא פונקציות טריגונומטריות

דוגמה 1

מה המחזור (הקטן ביותר) של הפונקציה $sin^4x - cos^4x$?

- לצורך הפתרון צריך לפשט את הביטוי, ובעזרת זהויות פשוטות להגיע ל- $sin^4x - cos^4x = -cos2x$. הדוגמא מדגישה את ההבדל בין מחזור ובין המחזור הקטן ביותר.

דוגמה 2

א. סרטט במחשב את הגרפים של הפונקציות:

(1) $y = sin\ sin\ x$

(2) $y = sin\ \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

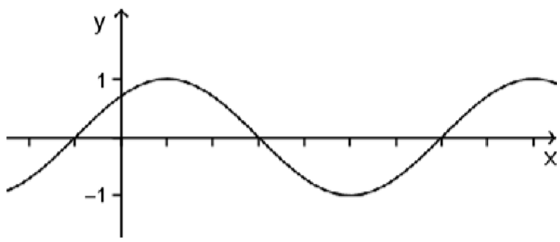
(3) $y = sin\ \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

(4) $y = sin\ (x + 2\pi)$.

ב. על צג המחשב מסורטטים עתה 3 גרפים בלבד. מדוע?

ג. הגרף המוצג באיור הוא של פונקציה מהמשפחה $y = sin\ (x + b)$.

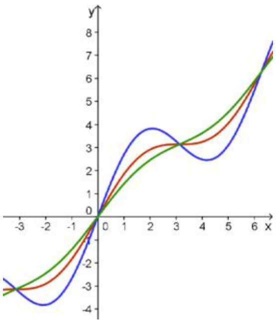
הצע ערך אפשרי לפרמטר b. האם קיימת אפשרות נוספת? הסבר.



מתוך רימון ופרל

- הדוגמה מדגימה את החזרה אל נושא הטרנספורמציות בכל פעם שעוסקים בפונקציה חדשה. כמו כן הדוגמה מדגימה אפשרות להדגיש תכונות של הפונקציות הטריגונומטרית באמצעות הטרנספורמציות.

דוגמה 3



1. סרטט את הפונקציות:

$$f(x) = \sin x + x$$
$$g(x) = 2\sin x + x$$
$$h(x) = 0.5\sin x + x$$

2. האם קיימת פונקציה מהמשפחה $y = \sin x + x$ שאין לה נקודת פיתול?

- הפתרון המתקבל מראה מצבים עם נקודות פיתול מסוגים שונים, ועם או בלי נקודות קיצון.

דוגמה 4

סרטט את גרף הפונקציה $f(x) = x^2 \cdot \sin x$ על סמך התנהגות שתי הפונקציות שבמכפלה.

- על התלמיד להבין איך צריך להיראות הגרף על סמך נקודות האפס ותכונת המחזוריות של פונקציית הסינוס, ועל סמך ההיכרות עם גרף הפרבולה, ולזהות את ה"מעטפת" של גרף הפונקציה.

דוגמה 5

היעזר בסרטוט של הפונקציה $f(x) = \sin x + x^2$ בתחום $-6\pi \le x \le 6\pi$ וסרטט את הפונקציות הבאות: $f(x) = \sin x + ax^2$

- על התלמיד להבין את השפעת כל אחד מהמחוברים על הפונקציה הנוצרת מסכומם. יתבקש סרטוט עבור הערכים השונים של הפרמטר a.

- הדוגמה מדגימה הבדל בין "מעטפת" גדלה ובין "מעטפת" קבועה.

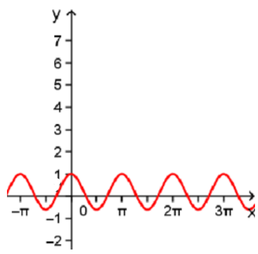
דוגמה 6

נתונה משפחת הפונקציות : $f(x) = x \; - A \cdot x$

1. מצא את שיעורי נקודות הקיצון וקבעו את סוגן. אילו מהן משותפות לכל המשפחה?
2. חלק את הפונקציות של המשפחה לשלוש קבוצות על-פי סוג הקיצון. סרטטו גרף המייצג כל אחת מהתת- משפחות בתחום $[-2\pi, 2\pi]$, וציין את כל ערכי הפרמטר המתאימים לכל גרף.
3. לאילו מבין הפונקציות אין נקודות אפסו? נמק.
4. מה ניתן ללמוד מסעיף ג על התמונה הגרפית של פונקציות במשפחה?

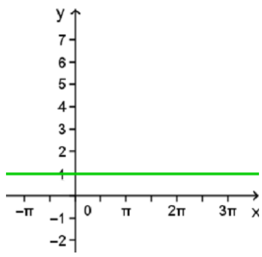
$A > -1$

דוגמה: $f(x) = x \; - 2x$



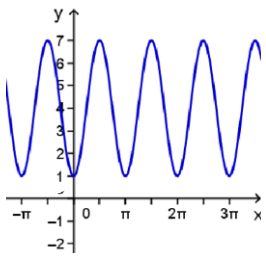
$A = -1$

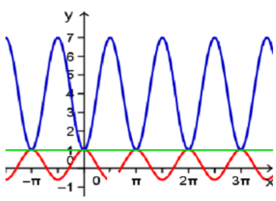
$f(x) = 1$



$A < -1$

דוגמה: $f(x) = x \; + 7x$





מעובד מתוך רימון ופרל

דוגמה 7

1. *חשב את ערך האינטגרל* $\int_0^{2\pi} (sin^2x + cos^2x)dx$
2. *נמק מדוע מתקיים השוויון:* $\int_0^{2\pi} sin^2xdx \int_0^{2\pi} cos^2xdx = $ *. היעזר בשיקולי המחזוריות והסימטריות של הפונקציות הטריגונומטריות.*
3. *היעזר בסעיפים א, ב וחשב את ערך האינטגרל* $\int_0^{2\pi} sin^2x\, dx$

- *זו דוגמה ייחודית של שימוש בזהויות ובתכונות הסימטריות והמחזוריות של הפונקציות הטריגונומטריות, המאפשרת חישוב ערך האינטגרל.*

דוגמאות 8- 11 הן ממבחני הבגרות.

רמת הטכניקה שנדרשה תואמת את התוכנית הנוכחית. בשאלות לא היתה דרישה מפורשת למחזוריות. לאור התוכנית, יתווספו בשאלות אלמנטים של שימוש במחזוריות.

דוגמה 8–בגרות חורף תשע״ג

נתונה הפונקציה $f(x) = -\sqrt{\sin x} + \frac{1}{2}\sin x$ בקטע $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$.

א. בקטע הנתון מצא:

(1) עבור אילו ערכי x הפונקציה מוגדרת.

(2) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בקטע הנתון.

(2) מצא משוואת ישר המשיק לגרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.

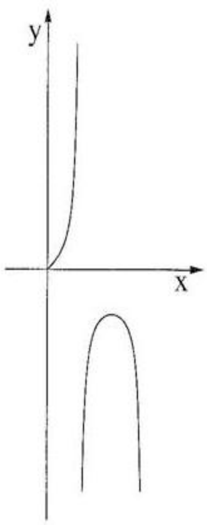
ג. האם יש ערכים של x בקטע הנתון שעבורם מתקיים האי־שוויון $\sqrt{\sin x} < \frac{1}{2}\sin x$?

נמק.

- את תחום ההגדרה מוצאים מתוך ההבנה שהשורש מוגדר רק כאשר פונקציית הסינוס אי-שלילית. את נקודות הקיצון אפשר למצוא בעזרת נגזרת או על ידי הבנה איכותית של התנהגות פונקציית הסינוס והשפעת השורש והכפל בקבוע על המחוברים. השאלה מהווה דוגמה איכותנית לפעולות על פונקציה.

- בכדי להדגיש את תכונת המחזוריות, ניתן לדרוש לחקור את הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$ ואז מתוך הבנת המחזוריות, לבקש לסרטט בתחום רחב יותר של כמה מחזורים שלמים.

דוגמה 9 –בגרות קיץ תשע"ה



נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sin x}{\cos 2x}$ ונתון התחום $0 \le x \le \frac{3\pi}{4}$

(ראה ציור).

ענה על הסעיפים א, ב ו־ג עבור התחום הנתון.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$,

וקבע את סוגן על פי הציור.

ב. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

- הכרת הפונקציות במונה ובמכנה, כולל סימניהן ברביעים השונים מאפשרת הבנה איכותנית של הפונקציה וגרף הפונקציה.
- בכדי להדגיש את תכונת המחזוריות, יש לשנות את התחום של הפונקציה, ולחקור את הפונקציה בתחום $0 \le x \le 2\pi$ ואז מתוך הבנת המחזוריות לבקש לסרטט בתחום רחב יותר של כמה מחזורים שלמים.

- אפשר להסיק את גרף הפונקציה כולו משיקולי אי-זוגיות ומחזוריות.

דוגמה 10 –בגרות קיץ תשע"ה מועד ב'

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$, ונתון התחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

בתחום הנתון ענה על הסעיפים א ו־ ב.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) האם הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית או אי־זוגית? נמק.

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) - a$.

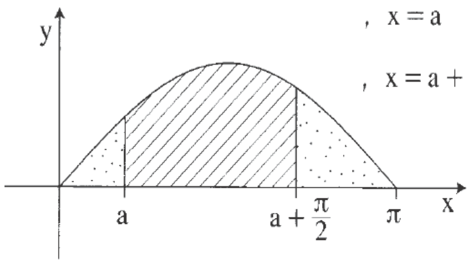
(1) מצא את הערכים האפשריים של a שעבורם יש למשוואה $f(x) - a = 0$ פתרון אחד בלבד.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ עבור כל אחד מהערכים של a שמצאת בתת־סעיף ב (1).

- ניתן לפשט את הפונקציה על ידי זהויות, ולשאול על המחזור שלה.
- שימוש בתכונות המחזוריות והסימטריה מאפשר להסיק מהסקיצה את הגרף של f עבור כל x .
- אפשר לפתור את השאלה בדרכים שונות ואז יש הזדמנות למגוון שיקולים כולל גזירה או פתרון מתוך הכרת תכונות פונקציית הסינוס והתנהגות אחד חלקי הפונקציה.

דוגמה 11 –בגרות קיץ תש"ע מועד ב'

נתונה הפונקציה $f(x) = \sin x$ בתחום $0 \le x \le \pi$ (ראה ציור).



מעבירים שני ישרים שמשוואותיהם: $x = a$, $x = a + \frac{\pi}{2}$,

$0 < a < \frac{\pi}{2}$.

S_1 הוא השטח המוגבל על ידי שני הישרים, על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה־ x (השטח המקווקו בציור).

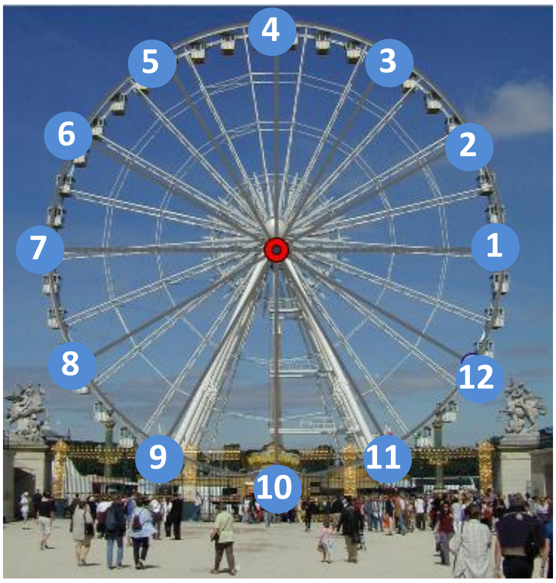
S_2 הוא סכום של שני שטחים, שכל אחד מהם מוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי אחד הישרים ועל ידי ציר ה־ x (סכום השטחים המנוקדים בציור).

מצא עבור איזה ערך של a היחס $\frac{S_1}{S_2}$ הוא מקסימלי.

- ניתן לפתור את השאלה בעזרת בניית פונקציה של יחסי השטחים.

לאחר פישוט מתקבלת הפונקציה: $s(x) = k \cdot sin\,(a + \frac{\pi}{4})$. מהיכרות עם גרף הסינוס מתקבלת התשובה, גם ללא גזירה.

- גישה נוספת לתרגיל מסתמכת על הכרת נקודת הקיצון בתחום של פונקציית הסינוס, והכרת הסימטריה סביב נקודת הקיצון. המקסימום של שטח S_1 , מתקבל כאשר מסתכלים על השטח בתחום מ- $\frac{\pi}{4}$ עד $\frac{3\pi}{4}$: אם נגדיל את a נאבד משמאל יותר ממה שנוסיף מימין, ובדומה יקרה אם נקטין את a. מכאן שהמצב הסימטרי הוא האופטימלי. כאשר השטח S_1 מקסימלי, היחס בין השטחים $\frac{S_1}{S_2}$ הוא מקסימלי.



דוגמה 12 – גלגל ענק

גלגל ענק שקוטרו 60 מטרים משלים סיבוב כל דקה.

מרכז גלגל הענק הוצב 40 מטרים מעל הקרקע.

בגלגל הענק 12 מושבים ל-12 נוסעים.

1. שרטט סקיצה לגרף הפונקציה המתאר את הגובה של נוסע מס 1 כתלות בזמן. רשום תבנית מתאימה לפונקציה .
2. במה יהיה שונה הגרף המתאר את הגובה של נוסע מס 10 מהגרף שבסעיף א׳. רשום תבנית מתאימה לפונקציה .
3. תארו כיצד ישתנה הגרף שבסעיף א׳ עבור כל אחד מהנוסעים.
4. כיצד תשתנה הפונקציה אם קוטר גלגל הענק יהיה 75 מטרים ? 30 מטרים?
5. כיצד תשתנה הפונקציה אם גלגל הענק יוצב 50 מטרים מעל האדמה?
6. בגלגל הענק ניתן לשנות את מהירות הסיבוב.
כיצד תשתנה הפונקציה אם גלגל הענק יכפיל את מהירותו וישלים כל דקה שני סיבובים?
אם יאט את מהירותו וישלים סיבוב בשתי דקות?

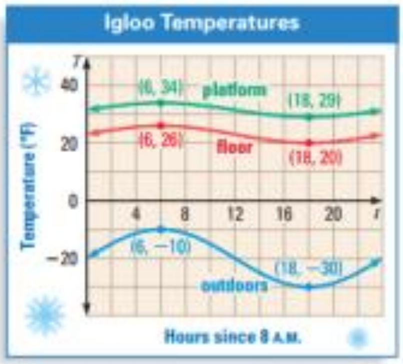
דוגמה 13 – שינוי טמפרטורה

http://www.classzone.com/eservices/home/pdf/student/LA214EAD.pdf

אסקימוסים משתמשים באיגלו כמחסה בפני תנאי חורף קשים. הגרף הבא מציג את הטמפרטורות בתוך ומחוץ לאיגלו במשך יום חורף טיפוסי. רשום מודל סינוסואידי לטמפרטורה החיצונית, לטמפרטורה בגובה הרצפה, ולטמפרטורה בגובה המיטה, כפונקציה של השעה החל מהשעה 8 בבוקר.

30. CLIMATE CONTROL Eskimos use igloos as temporary shelter from harsh winter weather. The graph shows the temperatures inside and outside an igloo throughout a typical winter day. Write a sinusoidal model for the outside temperature T (in degrees Fahrenheit) as a function of the time of day t (in hours since midnight). Then write sinusoidal models for the floor-level temperature and for the sleeping-platform temperature.

▶ Source: *Scientific American*



דוגמה 14 – התנהגות אוכלוסיה לפי מודל המבוסס על פונקציה מחזורית

https://www.haesemathematics.com.au/media/W1siZiIsIjIwMTUvMDMvMTkvMndwemRxemx0NF9pYnNzbF8yXzE4LnBkZiJdXQ/ibssl-2_18.pdf

אקולוג החוקר מושבה של חיפושיות מים, מעריך את גודל האוכלוסיה במשך 8 שבועות בעזרת המודל:

578 TRIGONOMETRIC FUNCTIONS (Chapter 18)

6 An ecologist studying a species of water beetle estimates the population of a colony over an eight week period. If t is the number of weeks after the initial estimate is made, then the population in thousands can be modelled by $P(t) = 5 + 2\sin(60t)$ where $0 \leqslant t \leqslant 8$.

a What was the initial population?

b What were the smallest and largest populations?

c During what time interval(s) did the population exceed 6000?

$$P(t) = 5 + 2sin\ (60t)$$

כאשר $P(t)$ הוא גודל האוכלוסיה (באלפים)

ו- t הוא מספר השבועות מתחילת המחקר $(0 \ \leq t \leq 8)$.

1. מה היה גודל האוכלוסייה ההתחלתי? מה היה גודל האוכלוסייה המקסימלי והמינימלי?
2. באלו זמנים גודל האוכלוסייה היה יותר מ- 6000?

דוגמה 15 – גאות ושפל

גאות ושפל משנים את עומק המים בנמל.

ידוע שבתאריך מסוים הגובה המקסימלי של המים במהלך היום יהיה 10 מטר בשעה 2 אחה״צ, והגובה המינימלי יהיה 1.2 מטר בשעה 8:15 בערב.

האם שייט של סירת מפרש בעלת עומק של 2 מטר יוכל לצאת מהנמל בבטחה בשעה 6:00 אחה״צ?

דוגמה 16 – טורף ונטרף

אוכלוסיית הינשופים (טורפים) באיזור מסוים נתונה על ידי המודל הבא:

$$P(t) = 1000 + 100sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

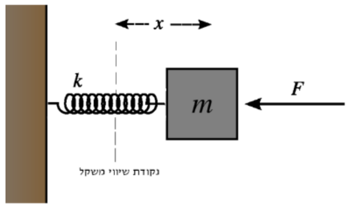
כאשר t הוא הזמן בחודשים מתחילת השנה (ינואר הוא $t = 0$).

אוכלוסיית העכברים (נטרפים) באותו איזור נתונה על ידי:

$$M(t) = 20000 + 4000cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

1. סרטט את הגרפים של שתי הפונקציות.
2. הסבר מה הקשר בין הגדלים של שתי האוכלוסיות.
3. איך משתנה היחס בין גודל אוכלוסיית העכברים לאוכלוסיית הינשופים במשך הזמן?
4. באלו זמנים יש הכי הרבה מזון זמין לכל ינשוף? אלו זמנים הם הכי בטוחים עבור העכברים?

דוגמה 17– התנהגות קפיץ



תרשים מתוך ערך: מתנד הרמוני ב http://www.wikiwand.com/he

מיקומו של גוף הקשור לקפיץ ומוגבל לנוע בתנועה חד ממדית לאורך קו ישר, ללא חיכוך, מתוארת על ידי: $x(t) = Asin\left(\left(\sqrt{k/m}\right)t\right)$ כאשר $x(t)$ היא פונקציה שמייצגת את מקומו של הגוף ביחס לנקודת שיווי המשקל של הקפיץ (ראה איור), m ו- k הם פרמטרים חיוביים המייצגים את מסת הגוף ו"קבוע הקפיץ" בהתאמה. ככל שהקפיץ יותר קשיח k יותר גדול, ככל שהגוף יותר כבד מסתו m יותר גדולה.

- המקום מיוצג על ידי פונקציה מחזורית. מהו זמן המחזור של הפונקציה ומה משמעותו הפיזיקלית? מה המשמעות של הקבוע A ? מה המיקום והמהירות ההתחלתית של הקפיץ, מתי הקפיץ מגיע למרחק המקסימלי מנקודת שיווי המשקל שלו, ומהו מרחק זה?
- אם מקטינים את המסה פי 4 מה קורה לזמן המחזור? באופן כללי, מה קורה לזמן המחזור כאשר מקטינים את המסה? מה קורה לזמן המחזור כאשר הקפיץ יותר קשיח?
- מהי מהירות הגוף בכל נקודת זמן? (המהירות היא הנגזרת בזמן של מקום הגוף)
- מהי תאוצת הגוף, $a(t) = x''(t)$ בכל נקודת זמן? (נזכיר כי התאוצה היא הנגזרת בזמן של מהירות הגוף)
- שימו לב לקשר שהתקבל בין פונקציית התאוצה לבין פונקציית המקום של הגוף:
$ma(t) = m\,x''(t) = -k\,x(t)$

המשוואה לעיל לקוחה מתחום הפיזיקה והיא משמשת "כמשוואת תנועה" לפי כללי הקינמטיקה, תאוצתו של הגוף נתונה על ידי הנגזרת השנייה לפי הזמן של פונקציית המקום, או במילים אחרות $x''(t)$.

לפי חוק הוק הכוח שמפעיל קפיץ על גוף הקשור לקצהו פרופורציוני בגודלו והפוך בכיוונו למרחק הקצה מנקודת שיווי המשקל ($x(t)$) ולכן ניתן לבטאו על ידי $-k\,x(t)$.

לפי החוק השני של ניוטון הכוח שפועל על גוף פרופורציוני לתאוצתו ומכאן אפשר להסיק את המשוואה $m\,x''(t) = -k\,x(t)$.

כלומר, מצאנו את משוואת ניוטון המתארת את הכלל: מסה X תאוצה = כוח.

להבדיל ממשוואה "רגילה" שפתרונותיה הם מספרים, משוואה דיפרנציאלית היא משוואה שפתרונותיה הן פונקציות והיא מקשרת בין פונקציה ונגזרותיה.

אכן, בדוגמא שלנו $m\,x''(t) = -k\,x(t)$

כאשר הפונקציה $x(t)$ היא הנעלם במשוואה זו ו $x''(t)$ היא נגזרתה השנייה.

- הראו כי הפונקציה $x(t) = Acos\left(\left(\sqrt{k/m}\right)t\right)$ גם היא פתרון של המשוואה לעיל. נבחן מה ההבדל בין שני הפתרונות שמצאת: מה זמן המחזור של פונקציה זו? מה המיקום והמהירות ההתחלתית של הקפיץ במקרה זה? השווה לתוצאות שקיבלת עבור הפיתרון הראשון של המשוואה.

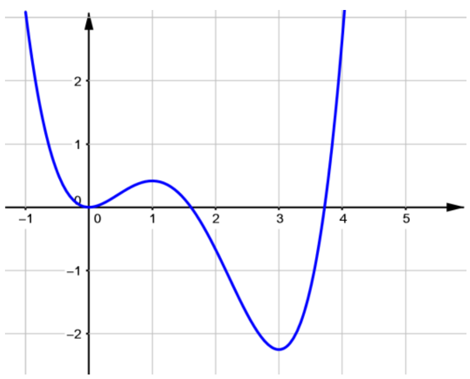
- [המחשה בגאוגברה של קפיץ אנכי]()

- ניתן להוסיף דיון בנושא יחידות פיזיקליות (x נמדד ביחידות אורך, למשל סנטימטרים, t נמדד ביחידות זמן, למשל שניות - ומכאן ניתן להסיק את היחידות של הפרמטרים מהירות ותאוצה)

דוגמה 18– קישור להעשרה : מוסיקה ותנועה גלית
http://www.haayal.co.il/story?id=1777

חשבון אינטגרלי

.1

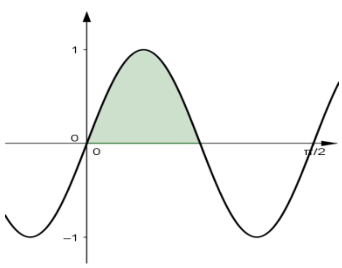


נתון גרף הפונקציה $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$.

1. האם F(0) חיובי או שלילי ? נמקו.
2. עבור אילו ערכי x הפונקציה F(x) יורדת? נמקו.
3. באילו נקודות, אם בכלל, לפונקציה F(x) יש מקסימום ? מינימום?
4. עבור אילו ערכי x הפונקציה F(x) קעורה כלפי מטה? נמקו.
5. האם לפונקציה F(x) יש נקודות פיתול? הסבירו.

2. השאלה מדגימה את חישוב האומדן לשטח שמתחת לעקום בעזרת מלבנים.

A



נתון גרף הפונקציה $f(x) = sin4x$

1. מהן נקודות החיתוך של הגרף עם ציר ה-x?
2. נקודת החיתוך הראשונה בחלק החיובי של ציר ה- x מסומנת ב- A. מהו שיעור ה-x של נקודה זו?
3. העריכו את השטח הצבוע בתחום $0 \leq x \leq x(A)$, בעזרת 4 מלבנים שווי רוחב.
4. העריכו מחדש את השטח בעזרת 8 מלבנים שווי רוחב.
5. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לציר ה-x בעזרת אינטגרל.

3. שאלה שמטרתה להבחין שהקשר בין תכונות פונקציות ההצטברות לתכונות הפונקציה המקורית מאפיין קשר שבין פונקציה לנגזרת.

הגרף משמאל [...] מתאר את המהירות של רוכב אופניים במהלך 3.5 שעות רכיבה.

1. מתי הייתה מהירותו של רוכב האופניים מקסימלית?
2. מתי היה רוכב האופניים במרחק הגדול ביותר מנקודת המוצא?
3. האם היה פרק זמן בו רוכב האופניים חזר על עקבותיו? אם כן – מתי?

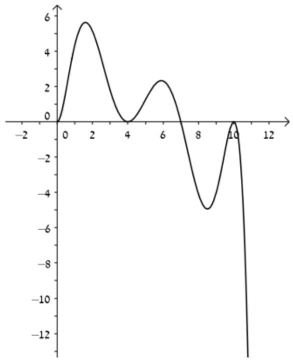
4. האם במהלך פרק הזמן המתואר בגרף חזר רוכב האופניים לנקודת המוצא?
5. באיזה חלק מהתחום פונקציית ההעתק עולה?
6. האם יש לפונקציית העתק נקודות פיתול? אם כן – מה המשמעות של כל נקודת פיתול?

4. השאלה מדגישה את הקשר בין טרנספורמציות על פונקציות וחישוב השטח.
מומלץ להיעזר בחקר שאלות מסוג זה בתוכנות גרפיות.

1. חשבו את השטח שבין גרף הפונקציה y=sinx לבין ציר ה- x בתחום שבין 0=x, לבין נקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה-x בחלק החיובי של ציר ה- x.
2. חשבו את השטח שבין גרף הפונקציה y=sin2x לבין ציר ה- x בתחום שבין 0=x, לבין נקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה-x בחלק החיובי של ציר ה- x.
3. מהו היחס בין השטחים שמצאתם בסעיפים הקודמים? הציעו הסברים לתשובתכם.
4. חשבו את השטח שבין גרף הפונקציה y=2sinx לבין ציר ה- x בתחום שבין 0=x, לבין נקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה-x בחלק החיובי של ציר ה- x.
5. מהו היחס בין השטחים שמצאתם בסעיפים הקודמים? הציעו הסברים לתשובתכם.

5. השאלה מדגימה חקירה של פונקציית ההצטברות מתוך גרף נתון של פונקציית קצב השינוי. הקשר בין גרף הנגזרת לגרף הפונקציה הקדומה שלה.

לפנינו גרף של פונקציה $f(x)$. נגדיר פונקציה $h(x) = \int_0^x f(t)dt$.

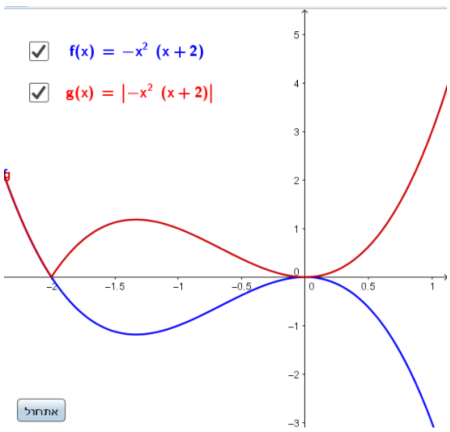


1. *מהם שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה ומה סוגן?*
2. *האם בנקודות $x = 4$, $x = 10$ הפונקציה $h(x)$ עולה או יורדת? הסבירו.*
3. *נתון כי* $\int_0^4 f(x)dx = 11$, $\int_7^{10} f(x)dx = -8.5$, $\int_4^7 f(x)dx = 4$, $\int_{10}^{12} f(x)dx = -6.5$
מצאו את שיעורי ה- y של נקודות הקיצון. הסבירו.
4. *סרטטו גרף סכמתי של הפונקציה* $h(x)$ בתחום $0 < x < 11$ וסמנו עליו את נקודות הקיצון ואת נקודות הפיתול (אם יש כאלה).

מעובד לפי: מתמטיקה עם מחשבון גרפי- חנה פרל

6. האינטגרל כפונקציה – פעילות המתבססת על שאלת בגרות.
השאלה עוסקת בקשר שבין פונקציה, אינטגרל מסוים, ופונקציה שמוגדרת באמצעותו – פונקציית ההצטברות.

חקרתם את הפונקציה $f(x) = x^2(x-2)$ ואת הפונקציה $g(x) = |f(x)|$ וקיבלתם את הגרפים:



1. איזה תחום מתקיים $g(x) = -f(x)$? כיצד תכונה זו מתבטאת בגרף?

2. השוו בין ערכי האינטגרל המסוים: $I_1 = \int_{-1}^{0} f(x)dx$, $I_2 = \int_{-1}^{0} g(x)dx$, אין צורך לחשב ערכים מספריים.
מה מייצג כל אינטגרל? הסבירו.

3. נגדיר פונקציה $h(a) = \int_{-1}^{a} f(x)dx$.
תוכלו להיעזר ביישומון וגררו את הנקודה A, והתבוננו בחלון השמאלי.

1) על פי הגרף של $f(x)$ תארו כיצד משתנה $h(a)$ ככל ש- a גדל?
2) באיזה תחומים, אם בכלל, הפונקציה $h(a)$ חיובית? שלילית?
3) באיזה תחומים, אם בכלל, הפונקציה $h(a)$ עולה? יורדת?
4) האם לפונקציה $h(a)$ יש נקודות קיצון? אם כן, מהן?
5) האם לפונקציה $h(a)$ יש נקודות פיתול? אם כן, מהן?
6) שרטטו סקיצה לגרף הפונקציה $h(a)$. מה מייצג הגרף?
7) רשמו ביטוי אלגברי מתאים לפונקציה $h(a)$.

סמנו עם העכבר את חלון הגרפי השני. רשמו ביטוי אלגברי עבור הפונקציה $h(x)$ בחלון הקלט (שימו לב יש לרשום את הביטוי כמשתנה של x ולא של a) ובדקו שהגרפים מתלכדים.

4. נגדיר פונקציה $t(a) = \int_{-1}^{a} g(x)dx$.

תוכלו להיעזר ב[יישומון] וגררו את הנקודה A, והתבוננו בחלון השמאלי.

1) על פי הגרף של $g(x)$ תארו כיצד משתנה $t(a)$ ככל ש- a גדל?
2) באיזה תחומים, אם בכלל, הפונקציה $t(a)$ חיובית? שלילית?
3) באיזה תחומים, אם בכלל, הפונקציה $t(a)$ עולה? יורדת?
4) האם לפונקציה $t(a)$ יש נקודות קיצון? אם כן, מהן?
5) שרטטו סקיצה לגרף הפונקציה $t(a)$. מה מייצג הגרף?
6) רשמו ביטוי אלגברי מתאים לפונקציה $t(a)$.

סמנו עם העכבר את חלון הגרפי השני. רשמו ביטוי אלגברי עבור הפונקציה $t(x)$ בחלון הקלט (שימו לב יש לרשום את הביטוי כמשתנה של x ולא של a) ובדקו שהגרפים מתלכדים.

5. השוו בין הפונקציות $h(a)$ ו- $t(a)$. במה דומים ובמה שונים הגרפים שלהם? מהי נקודת החיתוך בין הגרפים?

6. אם נשנה את הגבול התחתון של האינטגרל $h(a) = \int_{-0.5}^{a} f(x)dx$,
כיצד לדעתכם ישתנה גרף הפונקציה $h(a)$? כיצד ישתנה הביטוי האלגברי של הפונקציה? הסבירו מסקנתכם.

הזיזו ביישומון את הנקודה B וקבעו אותה כך ש- $x = -0.5$, גררו את הנקודה A ועקבו אחר בניית הגרף של h(a).

במקרה זה, היכן יפגשו הגרפים $h(a)$ ו- $t(a)$?

בדקו מסקנתכם עבורי ערכי גבול תחתון שונים

7. חקרו כיצד ישתנו ממצאיכם עבור הפונקציות :

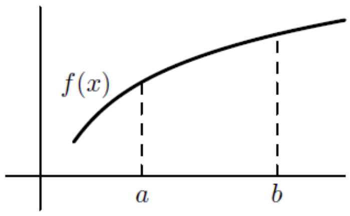
1. $f(x) = x^3 - x$ ו- $g(x) = |f(x)|$
2. $f(x) = x^3 - x$ ו- $g(x) = -f(x)$

שערו ובדקו ביישומון היכן יפגשו הגרפים $h(a)$ ו- $t(a)$? נמקו.

מקור : פעילות של מרכז המורים

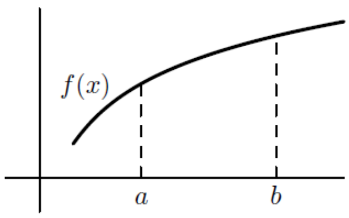
7. השאלה מדגימה את השימוש באומדן האינטגרל בעזרת השטח שמתחת לגרף ומלבן.

נתון גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $[a, b]$.



1). איזה מהביטויים מייצג את שטח המלבן המתואר בציור :

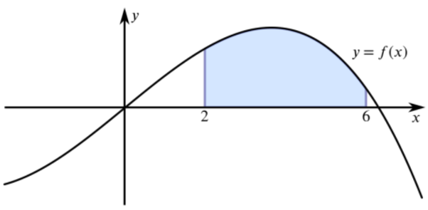
1. $f(b)(b-a)$
2. $f(a)(b-a)$
3. $\frac{1}{2}(a+b)(b-a)$



2). אילו מהטענות הבאות נכונה? נמקו

1. $\int_a^b f(x)dx < f(b)(b-a)$
2. $\int_a^b f(x)dx > f(b)(b-a)$
3. $\int_a^b f(x)dx < \frac{1}{2}(a+b)(b-a)$
4. קיים ערך c בתחום $[a, b]$ עבורו מתקיים השוויון $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

8. שאלה המדגימה חקירה של תכונות האינטגרל לחישוב שטח מתחת לגרף בתחום נתון.



ידוע כי השטח מתחת לגרף הנתון באיור הוא 40 יחידות שטח.

א. העריכו , אם ניתן, את ערך הביטויים הבאים : הסבירו.

אם לא ניתן למצוא את ערך הביטוי, באיזה מידע נוסף יש צורך בכדי שאפשר יהיה לחשב?

1) $\int_2^6 (f(x)+5)dx$
2) $\int_2^6 (f(x)-3)dx$
3) $\int_0^4 f(x+2)dx$
4) $\int_2^6 f(x+2)dx$
5) $\int_4^8 f(x+2)dx$
6) $\int_2^6 -f(x)dx$

7) $\int_2^6 \quad f(-x)dx$

2. האם ניתן למצוא ערך של k כך שיתקיים $\int_2^6 \quad (f(x)+k)dx = 0$? אם כן, מהו?

אם לא, נמקו.

מעובד ע"פ [Underground Mathematics]

שאלות יישומיות

9. השאלה מדגימה בעיה יישומית של פונקציית הצטברות

מים זורמים אל תוך מיכל במשך 10 דקות, בקצב הנתון של $f(t) = 5 - 0.5t$ ליטר לדקה.

1. מה היה קצב זרימת המים לאחר 3.5 דקות?
2. העריכו מה היה קצב זרימת המים הממוצע בדקה הרביעית? כמה מים זרמו למיכל בדקה זו?
3. מה היה קצב זרימת המים הממוצע בזמן $3.25 \le t \le 3.75$? כמה מים זרמו למיכל בזמן זה?
4. מה היה קצב זרימת המים הממוצע בזמן $3.4 \le t \le 3.6$? כמה מים זרמו למיכל בזמן זה?
5. חשבו כמה מים זרמו למיכל מהתחלה ועד t=3.5 דקות. הסבירו את תוצאת החישוב לאור חישובכם בסעיפים הקודמים.
6. מצאו כמה מים זרמו במשך x הדקות הראשונות. נמקו מדוע כמות המים שזרמה במשך x הדקות הראשונות היא פונקציה של x? בחרו ושם לפונקציה ונמקו את בחירתכם.
7. נסו לקבוע מהי הפונקציה הנגזרת של הפונקציה שמצאתם בסעיף הקודם.
8. גזרו את הפונקציה שמצאתם בסעיף ו' והסבירו איזה גודל היא מייצגת

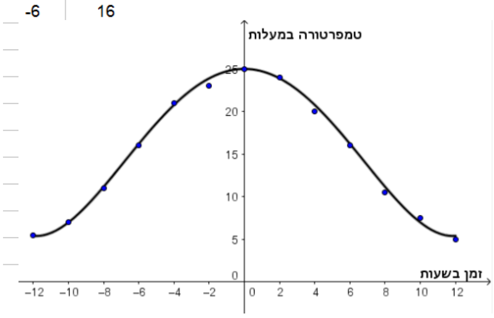
10. השאלה מדגימה את השימוש באינטגרל לשם חישוב ממוצע הפונקציה בתחום בבעיה יישומית

בחודש מרץ, נמדדה הטמפרטורה באחת מתחנות מזג האוויר בארץ, בכל שעתיים במשך 24 שעות, החל מחצות הליל עד לחצות היום הבא.

1. חשבו את ממוצע הטמפרטורות באותו יום על פי הנתונים המצורפים בטבלה.

טמפרטורה	שעה
5.5	-12
7	-10
11	-8
16	-6

2. החוקרים בתחנת מזג האוויר העלו את הנתונים על מערכת הצירים וקיבלו שניתן לשרטט סקיצה לגרף המתאר בקירוב את השתנות הטמפרטורה במהלך היממה:



קראו מתוך הגרף את הטמפרטורות אם היו נמדדות בכל שעה. וחשבו שוב את הממוצע.

מצאו כי ניתן לאמוד את השתנות הטמפרטורה בימִמה בקירוב על פי הפונקציה בגרף:

$T(t) = 0.001t^4 - 0.28t^2 - 25$, כאשר t הוא מספר השעות מצהרי היום.

3. חשבו את ממוצע הטמפרטורות, על פי ערכי הפונקציה הנתונה, (ניתן להיעזר בגיליון אלקטרוני), אם הטמפרטורות היו נמדדות:
(1) כל שעתיים
(2) כל שעה
(3) כל חצי שעה
(4) כל דקה

4. חשבו את ערך הביטוי : $\frac{\int_{-12}^{12} T(t)dt}{24}$. מה קיבלתם? הסבירו.
5. *האם קיימת נקודה בזמן במשך היממה שבה הטמפרטורה הממוצעת שמצאתם בסעיף הקודם היתה זהה לטמפרטורה בפועל? אם כן, באיזו שעה?*
6. *חשבו את ממוצע הטמפרטורות החל מצהרי היום (t=0) ועד חצות היום (t=12).*

11. השאלה מדגימה : בעיית קיצון עם אינטגרלים ואת השימוש באינטגרל לשם חישוב הממוצע של פונקציה. כמו כן נדרש למצוא אינטגרל עבור פונקציה מורכבת כאשר ניתן לזהות את נגזרת הפונקציה הפנימית, המלווה בסעיף מדרגה המרמז על מציאת הנגזרת הפנימית והחיצונית)

א. גזרו את הפונקציה $g(x) = (x^2 - 2x)^5$ והציעו בעזרתה פונקציה קדומה ל -

לפונקציה : $f(x) = (x^2 - 2x)^4(x - 1)$

הממוצע של פונקציה על קטע [a,b] מוגדר על ידי הנוסחה $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

ב. חשבו את ממוצע הפונקציה $f(x)$ בקטע [0,1] .

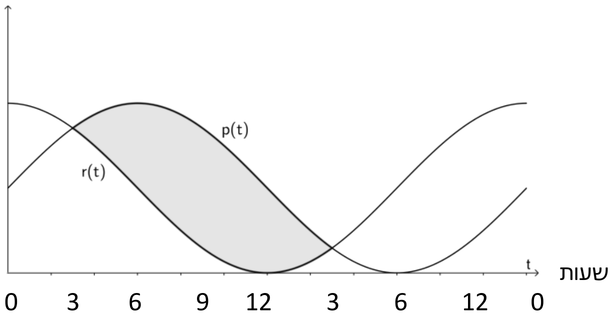
ג. עבור איזה ערך של c יהיה לפונקציה $f(x)$ ממוצע אפס בקטע [c,0] ? הסבירו מדוע.

ד. עבור איזה ערך של c יהיה לפונקציה $f(x)$ ממוצע קטן ביותר בקטע [c,0] ? הסבירו מדוע.

*מעובד על פי יואל גבע, 806, כרך ד (*לדעתי, לקוח מאחת בחינות הבגרות...)*

12. השאלה מדגימה שאלה יישומית עם הפרש שתי פונקציות הצטברות וייצוג כשטחים הכלואים בין שני הגרפים. יש להפעיל שיקולים איכותניים וכן חישוב אינטגרל.

H(t) פונקציה המתארת את רמתו של הורמון מסוים בדם בזמן t. רמת ההורמון מוסדרת בעזרת שני תהליכים נפרדים : האחד קצב ייצור ההורמון התלוי בשעה של היום, בתהליך מחזורי שחוזר על עצמו כל 24 שעות. ותהליך נוסף הוא הפרשת ההורמון מהגוף בשל פירוקו על ידי אנזימים. בדוגמה הבאה נניח שקצב יצור ההורמון p(t), וקצב הפרשת ההורמון r(t) הם פונקציות מחזוריות המתוארות בגרף הבא :



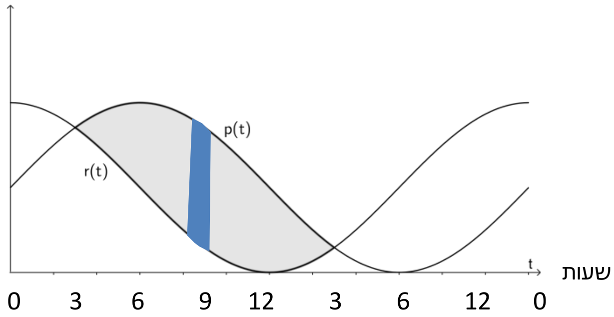
ענו על פי הגרף :

1. באיזו שעה קצב ייצור ההורמון מקסימלי?
2. באיזו שעה קצב הפרשת ההורמון מינימלי?
3. באילו שעות רמת ההורמון בדם עולה? יורדת?
4. מה מייצג את הצטברות ההורמון בגרף במהלך הדקה התשיעית?
5. מה מייצג את קצב השינוי של ההורמון כאשר t=9?
6. באיזו שעה רמת ההורמון בדם מקסימלית?
7. באיזו שעה רמת ההורמון בדם מינימלית?
8. *מצאו את הרמה המקסימלית של ההורמון בדם אם ידוע כי :*

$r(t) = 1 + cos(\frac{\pi}{12}t)$, $p(t) = 1 + sin(\frac{\pi}{12}t)$ וידוע שהרמה המינימלית של ההורמון בדם היא 0.

הצעה לפתרונות :

1. על פי הגרף, קצב ייצור ההורמון מקסימלי בשעה 9:00.
2. על פי הגרף, קצב הפרשת ההורמון מינימלית בשעה 12:00.
3. רמת ההורמון בדם עולה כשקצב ייצור הורמון גדול מקצב הפרשתו כלומר בין 3:00 לפנות בוקר ל- 3:00 אחה"צ. בין 3 אחה"צ ל- 3:00 לפנות בוקר רמת ההורמון יורדת, כי בפרק זמן זה קצב ההפרשה של ההורמון גדול מקצב ייצורו.



4. הצטברות ההורמון בדקה התשיעית מיוצגת על ידי השטח המסומן משמאל.
5. קצב השינוי של ההורמון כאשר t=9 מיוצג על ידי ההפרש r(9)-p(9). (אורך הקטע המקווקו באיור)
6. כמות ההורמון מקסימלית במעבר מתחום העלייה לתחום הירידה של פונקציית ההצטברות, כלומר בשעה 3:00 לפני הצהריים. (לאחר מכן הכמות המצטברת מתחילה לרדת כי קצב הפרשת ההורמון אז גדולה מקצב יצור ההורמון).
7. באופן דומה, רמת ההורמון בדם מינימלית כאשר קצב ייצור ההורמון הופכת להיות גדולה מקצב הפרשת ההורמון. זה קורה ב3 לפנות בוקר.
8. $H(t) = \int_a^b \quad (p(t) - r(t))dt$
9. נמצא את נקודות החיתוך בין הגרפים: $1 + sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 1 + cos(\frac{\pi}{12}t)$

$$tan\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 1 \rightarrow t = 3{,}15$$

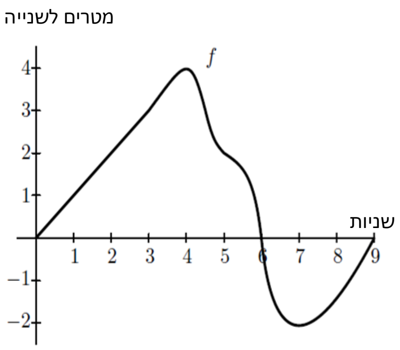
$$H(t) = \int_3^{15} \quad \left(\left(1 + sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)\right) - 1 - cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)\right)dt$$

מעובד מתוך:

Applications of the definite integral to velocities, and rates

13. השאלה מדגימה יישום של פונקציית ההצטברות בבעיות תנועה, וחקירה איכותנית הגרפים המתאימים

נתון גרף הפונקציה $f(x)$, המתארת את המהירות של חלקיק, פונקציה גזירה בכל תחום הגדרתה. נתון כי המיקום במטרים ביחס לראשית הצירים של חלקיק הנע לאורך ציר ה- x כתלות בזמן t בשניות מתואר על פי הפונקציה $s(x) = \int_0^t \quad f(x)dx$ בראשית התנועה נמצא החלקיק בראשית הצירים.



1. מהי מהירות החלקיק בזמן $t = 3$?
2. האם המהירות של החלקיק בזמן $t = 3$ הולכת וגדלה? (תאוצה)
3. מה המיקום של החלקיק בזמן $t = 3$?
4. העריכו את המהירות הממוצעת של החלקיק בדקה הרביעית לתנועה. הסבירו.
5. העריכו את הדרך שעבר החלקיק בדקה הרביעית לתנועה. הסבירו.
6. באיזה זמן, במהלך 9 הדקות, הפונקציה $s(x)$ מקבלת את הערך הגדול ביותר? הסבירו.
7. מתי החלקיק מתרחק מנקודת ההתחלה שלו? מתי החלקיק נע לכוון נקודת ההתחלה שלו? הסבירו.
8. באיזה צד של נקודת ההתחלה נמצא החלקיק בזמן $t = 9$? הסבירו.

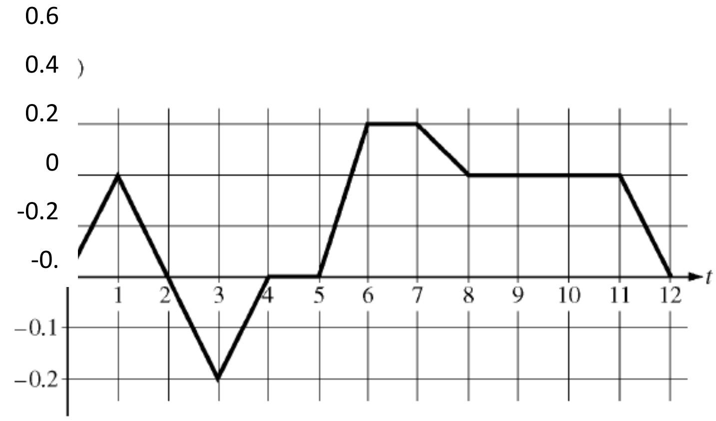
מעובד על פי – AP, 2006

14. השאלה מדגימה יישום של פונקציית ההצטברות בבעיות תנועה, וחקירה איכותנית של גרף הדרך כתלות בזמן על פי גרף המהירות כתלות בזמן הנתון. יש כאן התייחסות למושגים: קצב שינוי המהירות (תאוצה) –

הנגזרת של המהירות), אבחנה בין אורך הדרך שנסעה (אינטגרל של ערך מוחלט של פונקציית המהירות) לבין העתק, המרחק מנקודת המוצא (אינטגרל של פונקציית המהירות)

קרן רכבה באופניים במסלול ישר מביתה לבית הספר במשך 12 דקות.
בגרף המצורף מתוארת פונקציית המהירות שלה בק״מ לדקה $v(t)$ כאשר t מציין זמן בדקות.

1. מצאו מה הייתה התאוצה (קצב השינוי של המהירות) של האופניים בזמן $t=7.5$?



ציינו יחידות.

2. באיזו דקה מהירות הרכיבה של קרן הייתה הגדולה ביותר?
באיזה דקה קצב שינוי המהירות היה הגדול ביותר?
באיזה דקה המרחק של קרן מביתה היה הגדול ביותר?

3. מה אורך הדרך שעשתה קרן בזמן $6 \le t \le 7$? ובזמן $6 \le t \le 8$?
4. זמן מה לאחר שיצאה מביתה, קרן נזכרה ששכחה את העבודה במתמטיקה וחזרה לביתה. קבעו באיזה דקה חזרה, ומה היה אז המרחק שלה מביתה, ונמקו תשובתכם.
5. הסבירו מה המשמעות של הביטוי $\int_0^{12} |v(t)|dt$ בסיפור הרכיבה של קרן וחשבו את ערכו.
6. הסבירו מה המשמעות של הביטוי $\int_0^{12} v(t)dt$ בסיפור הרכיבה של קרן וחשבו את ערכו.

עידו גם הוא רכב באופניים במסלול ישר מביתו לבית הספר במשך 12 דקות. מהירותו בקמ״ש מתוארת על ידי הפונקציה: $w(t) = -0.01x^2 + 0.12x$.

7. מי גר קרוב יותר לבית הספר, קרן או עידו?

הצעה לתשובות

1. $a(7.5) = v'(7.5) = \frac{v(8)-v(7)}{8-7} = -0.2$ ק״מ/דקה²
4. קרן חזרה לביתה לאחר 2 דקות, בזמן בה המהירות הפכה להיות שלילית, ומרחקה מביתה היה:

$$s = \int_0^2 v(t)dt = 0.4 \text{ ק"מ}$$

5. הביטוי מבטא את הדרך כולה בק״מ שרכבה קרן במשך 12 דקות.

$$\int_0^{12} |v(t)|dt = \int_0^2 v(t)dt - \int_2^4 v(t)dt + \int_4^{12} v(t)dt = 0.4 + 0.4 + 2.8 = 3.6 \text{ ק״מ}$$

6. עידו גר במרחק 2.8 ק״מ מבית הספר: $\int_0^{12} w(t)dt = 2.8$
קרן גרה במרחק 1.4 ק״מ מבית הספר: $\int_0^{12} v(t)dt = 1.4$

מקור – AP, 2009

15. השאלה מדגימה יישום של פונקציית קצב השינוי ופונקציית ההצטברות בבעיות תנועה, כאשר הנתונים בדידים.

טיל מונחה נורה לאוויר במהירות אנכית המתוארת על ידי הפונקציה $v(t)$ במטר לשנייה.
מהירות הטיל נמדדה בזמנים שונים בתחום בו $0 \le t \le 80$, כאשר t נמדד בשניות.

t שניות	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$v(t)$ מטר לשניה	5	14	22	29	35	40	44	47	49

1. האם המהירות משתנה בקצב קבוע? הסבירו.
2. הסבירו מה המשמעות של הביטוי $\frac{v(30)-v(20)}{30-20}$ בסיפור של מעוף הטיל.
3. הסבירו מה המשמעות של $\int_{10}^{70} v(t)dt$ בסיפור של מעוף הטיל.

טיל מונחה נוסף נורה. תאוצתו האנכית נתונה על ידי הביטוי $a(t) = \frac{3}{\sqrt{t+1}}$ במטר לשנייה².
הטיל נורה מגובה הקרקע, ומהירותו התחילית הייתה 2 מטר לשנייה.

4. מי משני הטילים נע מהר יותר בזמן $t = 80$ שניות? הסבירו תשובתכם.

*בבעיה זו נתבונן בתנועת הטיל האנכית כלפי מעלה.

16. השאלה מדגימה יישום של פונקציית ההצטברות למציאת נפחים של גופי סיבוב. מטרת הפעילות לפתח נוסחאות לנפחים של גופים מוכרים באמצעות סיבוב גרפים של פונקציות מתאימות

א. בחרו פונקציה מתאימה לחישוב נפח חרוט ישר, ונסחו את הנוסחה.

ב. בחרו פונקציה מתאימה לחישוב נפח חרוט ישר קטום ונסחו את הנוסחה .

ג. בחרו פונקציה מתאימה לחישוב נפח כדור ונסחו את הנוסחה.

ד. בחרו פונקציה מתאימה לחישוב נפח טבעת (הפרש בין גלילים) ונסחו את הנוסחה.

17. דוגמה לטיפול בנפחים של גופי סיבוב כאשר הסרטוט או הסיפור מציגים אותם במצב "עמידה" והתלמיד צריך למקם אותם במערכת צירים באופן שיאפשר את הפתרון)

גביע גלידה בצורת חרוט, קוטר שפת הגביע שווה לרבע מגובה הגביע. ממלאים את הגביע בגלידה. בתהליך המילוי גדל גובה חרוט הגלידה, ובסיס החרוט גדל גם הוא, כפונקציה של הגובה.

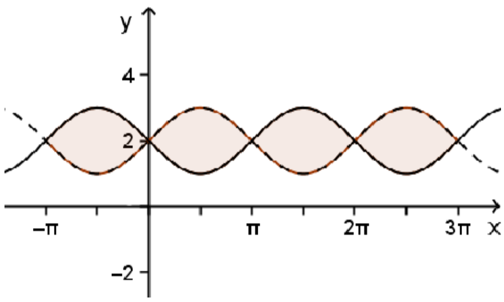
a. מהי הפונקציה המתאימה לגובה חרוט הגלידה את שטח הבסיס של חרוט הגלידה?
b. מהי הפונקציה המתאימה לגובה חרוט הגלידה את נפח הגלידה בגביע?
c. מהו קצב השינוי של נפח הגלידה, ביחס לגובה הגלידה שבגביע.

הערה: שאלה מסוג זה מתאים שתופיע, לפחות בהתחלה, עם סרטוט ורמזים

18. ענו על השאלה הקודמת עבור גביע גלידה בצורת פירמידה ישרה שבסיסה ריבוע, אשר אורך צלעו שווה לגובה הריבוע.

19. שאלה בנושא נפח גוף סיבוב

א. מהו נפח גוף הסיבוב הנוצר מסיבוב השטח הכלוא בין הגרף של $f(x) = 2 + \sin x$ לבין הגרף של $g(x) = 2 - \sin x$, סביב ציר ה- x בתחומים הבאים (איור 53):



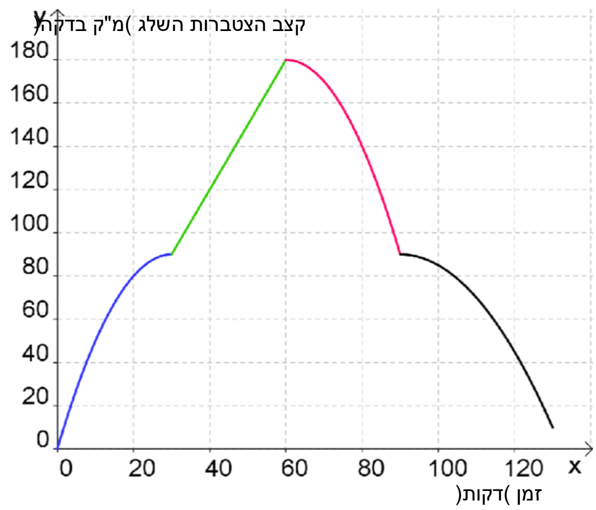
(1) $-\pi \le x \le 0$ (2) $0 \le x \le \pi$ (3) $-\pi \le x \le 3\pi$.

ב. דני חישב את האינטגרל: $\pi \int_{-\pi}^{3\pi} \left((2 + \sin x)^2 - (2 - \sin x)^2\right)dx$

ומצא שהוא אפס. האם זה ייתכן? הסבירו.

ד. מהו ערך האינטגרל: $\pi \int_{-\square}^{2\pi} \left((2 + \sin x)^2 - (2 - \sin x)^2\right)dx$?

מעובד לפי: ללמוד וללמד אנליזה



20.

בשעה 10:00 החל לרדת שלג במתחם כלשהו. הפונקציה $f(x)$ מתארת את קצב הצטברות השלג ביחידות של מטר מעוקב לדקה, החל מהשעה 10:00.

האיור מציג את גרף הפונקציה.

1. באיזה פרק זמן פונקציית ההצטברות קעורה כלפי מעלה, ובאיזה פרק זמן פונקציית ההצטברות קעורה כלפי מטה?
2. מהו (אם יש כזה) התחום בו פונקציית ההצטברות עולה?
3. מהו (אם יש כזה) התחום בו פונקציית ההצטברות יורדת?
4. באיזו שעה, בפרק הזמן המוצג בגרף, הייתה כמות השלג במתחם מקסימלית?

נתון גם:

$$f(x) = \{-0.1(x-30)^2 + 90, 0 \le x \le 30\ 3x, 30 \le x \le 60\ \ -0.1(x-60)^2 + 180, 60 \le x \le 90\ \ -0.05(x-90)^2 + 90, x > 90$$

5. מהי כמות השלג שהצטבר במתחם במהלך שעתיים, החל מהשעה 10:00 אם השלג לא נמס?

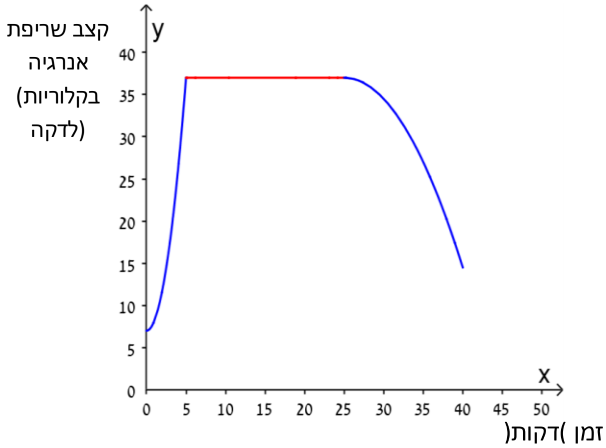
6. רשמו פונקציה $V(x)$ המתארת את הצטברות השלג במהלך השעתיים הראשונות לירידת השלג. רשמו יחידות מתאימות

מעובד לפי ללמוד וללמד אנליזה

21. שאלה יישומית

קצב שריפת האנרגיה של אדם מתאמן בעזרת מכשיר מסוים במשך 40 דקות נתון על-ידי הפונקציה $b(x)$:

$$b(x) = \{1.2x^2 + 7\,, \qquad 0 \le x \le 5\ 37\ ,$$
$$5 \le x \le 25\ \ -0.1(x-25)^2 + 37, \quad 25 \le x \le 40$$

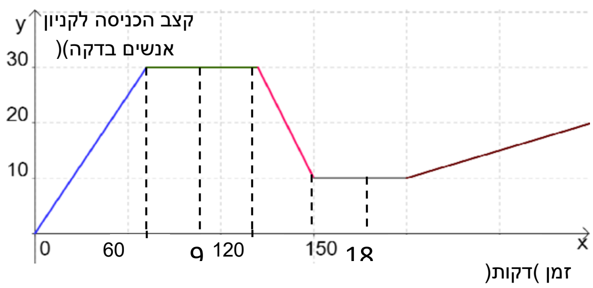


האיור מציג את גרף הפונקציה.

1. תארו במילים את שריפת הקלוריות של המתאמן במכשיר זה במשך 40 דקות.
2. כמה קלוריות שורף אותו אדם במהלך 40 דקות?

מעובד לפי ללמוד וללמד אנליזה

22.



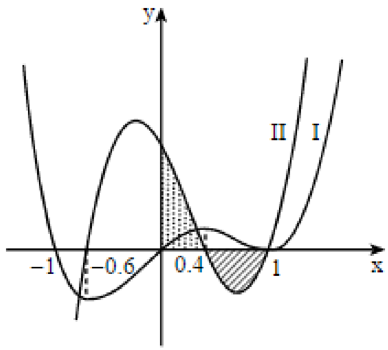
האיור מציג את גרף הפונקציה המתארת את קצב כניסת אנשים לקניון, החל מהשעה 9:00 בבוקר, שעת הפתיחה של הקניון.

כמה אנשים נכנסו לקניון עד 12:00?

עיבוד שאלות בגרות

<u>בגרות, קיץ 2009, שאלה 6</u>

בסעיף ד - השאלה מדגימה שימוש במשפט הבסיסי של החדו"א והקשר בין גרף הפונקציה לנגזרתה ולאינטגרל.



בציור שלפניך מוצגות סקיצות של שני גרפים: גרף I וגרף II. אחד הגרפים הוא הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, והגרף האחר הוא הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.

א. איזה גרף הוא של $f'(x)$, ואיזה גרף הוא של $f''(x)$? נמק.

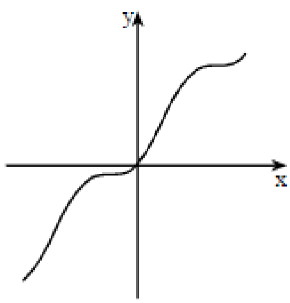
ב. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ג. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ד. הוכח שהשטח המוגבל על ידי גרף II וציר ה- x (השטח המקווקו בציור) שווה לשטח המוגבל על ידי גרף II והצירים (השטח המנוקד בציור).

<u>בגרות, קיץ 2009, שאלה 7</u>

בסעיף ג- השאלה מדגימה שימוש בחישוב שטח בין שני עקומים, שימוש בתכונות הסימטריה.



נתונה הפונקציה $f(x) = x - \frac{\sin(2x)}{2}$.

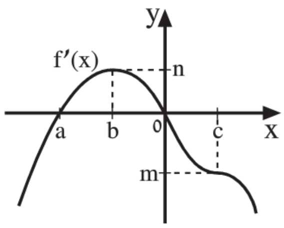
א. הראה כי $f'(x) = 2\sin^2 x$.

ב. (1) האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.

(2) האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות פיתול? נמק.

ג. בציור שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה $g(x) = x + \sin^2 x$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.
בתחום הנתון מצא את כל השטח המוגבל על ידי הגרף של $g(x)$ ועל ידי הישר $y = x$.

סעיף ד בשאלה מדגים שימוש במשפט היסודי וכן מציאת אינטגרל של פונקציה מורכבת.
אנו מציעים להקדים לסעיף זה שאלות מדרגה.



נתונה פונקציה $f(x)$. בציור מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$. נתון: $f(a) = k$, $f(b) = p$, $f(o) = s$, $f(c) = t$.

א. הבע באמצעות פרמטרים מתאימים:

(1) את השיעורים של נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבע את סוגן.

(2) את השיעורים של נקודת הפיתול של $f(x)$.

(3) את השיעורים של הנקודות על הגרף של $f(x)$ שבהן $f''(x) = 0$.

(4) את שיפועי המשיקים לגרף של $f(x)$ בנקודות שמצאת בסעיף (3).

(5) את משוואות המשיקים לגרף של $f(x)$ בנקודות שמצאת בסעיף (3).

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, בתחום שבו משורטט הגרף של הנגזרת $f'(x)$, אם נתון שהיא מקבלת רק ערכים חיוביים בתחום זה. סמן על הגרף את נקודת הפיתול.

ג. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של $f(x)$.

ד. נסמן ב-x_1 את שיעור ה-x של נקודת המינימום של $f(x)$ וב-x_2 את שיעור ה-x של נקודת הפיתול של $f(x)$. הבע באמצעות פרמטרים מתאימים את ערך האינטגרל: $\int_{x_1}^{x_2} \frac{f'(x)}{(f(x))^2}\,dx$.

* הבע באמצעות פרמטרים מתאימים את ערך האינטגרל $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

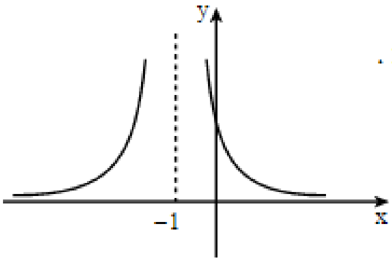
* רשמו ביטוי לנגזרת הפונקציה $y = \frac{1}{f(x)}$

<u>בגרות, קיץ 2012 שאלה 8</u>

בסעיף ג - השאלה מדגימה שימוש במשפט הבסיסי של החדו"א

הפונקציה $f(x)$ היא פונקציית מנה המוגדרת עבור $x \neq -1$.

בציור מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



א. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ב. נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש שתי אסימפטוטות בלבד: $x=-1$, $y=1$.
גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה-y בנקודה שבה $y=-1$. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, על פי תשובתך לסעיף א' ועל פי הנתונים שבסעיף ב'.

ג. נתון גם $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$. a, b, c ו- d הם פרמטרים שונים מאפס.
(1) הבע באמצעות a את b, c ו- d.
(2) חשב את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי הישר $x=1$ ועל ידי הצירים.

<u>בגרות, קיץ 2011 , מועד ב, שאלה 8</u>

בסעיף ד - השאלה מדגימה חישוב של נפח גוף סיבוב של פונקציה פשוטה.

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\cos x}$.

א. מצא אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית. נמק.

ב. בתחום $0 \le x \le 2\pi$:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה, ואת האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן. נמק.

(3) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. לשרטוט ששרטטת בתת-סעיף ב(3) הוסף סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-2\pi \le x \le 0$.

ד. השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי הישר $y=2$, על ידי הישר $x=\frac{\pi}{2}$, על ידי ציר ה-x ועל ידי ציר ה-y, מסתובב סביב ציר ה-x.

מצא את הנפח של גוף הסיבוב שנוצר.

ה. בתחום שבין ∞ ל- $-\infty$, רשום בצורה כללית את השיעורים:

(1) של נקודות המינימום של הפונקציה $f(x)$.

(2) של נקודות המקסימום של הפונקציה $f(x)$.

-

בגרות חורף תשס"ח

השאלה מדגימה חישוב נפח גוף סיבוב. חישוב האינטגרל על ידי פישוט אלגברי פשוט.

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$, $a>0$.

א. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(3) אסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

(4) תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.

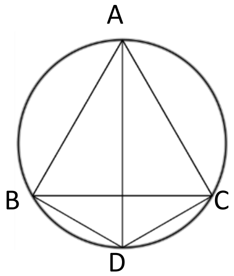
ב. על פי תשובותיך לסעיף א, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי הישר $y=\sqrt{3}$ ועל ידי הצירים מסתובב סביב ציר ה-x.

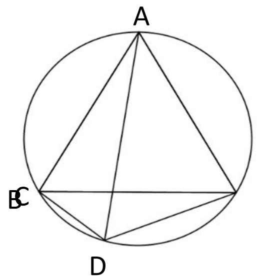
הבע באמצעות a את הנפח של גוף הסיבוב שמתקבל.

טריגונומטריה במישור כולל משוואות טריגונומטריות

1. א. משולש שווה צלעות ABC חסום במעגל. D אמצע הקשת BC.
הוכיחו: AD = BD + CD.



ב. האם הטענה שהוכחתם מתקיימת גם כאשר הנקודה D נמצאת על הקשת BC, אך לא באמצע הקשת?
הוכיחו או הפריכו. תוכלו לבדוק את השערתכם באמצעות יישומון דינמי.

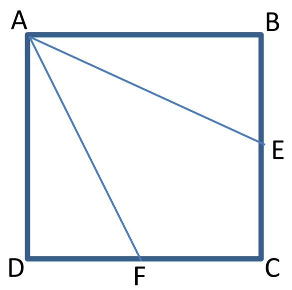


- השאלה ממחישה את היופי שבשימוש ביישומון דינמי, ככלי לבדיקת השערות או גילוי קשרים שלא שוערו, שאחר כך אפשר להוכיח אותם בכלים טריגונומטריים פשוטים.

תובנה המקשרת את תכונות הציור הנתון לבעיית קיצון:
לסכום הקטעים BD + CD יש מקסימום כאשרAD הוא קוטר.
תכונה נוספת: סכום הקטעים BD + CD לא קבוע וסכום הקשתות שלהם הוא קבוע.

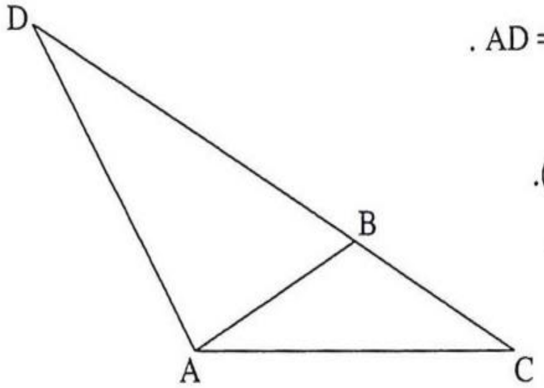
2. נתון ריבוע ABCD. E , F הן אמצעי הצלעות BC ו- CD בהתאמה.
חשב ללא מחשבון את $\sin(\sphericalangle EAF)$.

(לקוח מתוך מועדון ה-5)



- מומלץ למצוא לבעיה פתרונות רבים ככל האפשר.
פתרונות טריגונומטריים שונים דורשים שימוש במשפטים שונים ובזהויות בסיסיות שונות.

3. בגרות קיץ תשע"ד מועד ג', 5 יח"ל



נתון משולש שווה־שוקיים ADC שבו $AD = AC$.

נקודה B נמצאת על הצלע DC

כך ש־ $AB = BC$ ו־ $DC = 3BC$ (ראה ציור).

א. מצא את גודל הזוויות במשולש ADC.

ב. נתון גם כי שטח המשולש ADC

הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר.

BT הוא גובה לצלע AC במשולש ABC.

מצא את האורך של הקטע DT.

- ניתן לשנות בעזרת ישומון דינמי את היחס $BC : DC$ ולראות את ההשפעה על הזוויות.

הסתברות

דוגמאות לפרק הסתברות:

שכיחויות והסתברויות

1. שאלות הבנה קצרות כגון:

הסבירו מדוע מאורעות זרים, שההסתברות של כל אחד איננה אפס, הם בהכרח מאורעות תלויים. הביאו דוגמא.

2. דוגמה

מטרת הדוגמה לבנות קשר בין הסתברות ניסויית, בה חוזרים שוב ושוב על הניסוי ויוצרים טבלת שכיחויות וגרף עמודות, לבין הסתברות תיאורטית.

הפעילות "גלגלי המזל" מאתר מרכז המורים, כוללת יישום אינטראקטיבי, סימולציה, לעריכת ניסויים דו שלביים (ויותר) ב K גלגלי מזל בעלי N גזרות, וחקירת השכיחויות ומתוכן הסקה של ההסתברות.

יש לנסח מספר שאלות חקר ולבקש מהתלמידים גם לנסח שאלות או לציין ממצאים שמפתיעים אותם.

3. דוגמאות לכך שאותו מודל הסתברותי מתאים לתרחישים שונים, למשל:

א. אפשר להשתמש בגלגלי המזל כדי למצוא מה קורה בהטלות מטבע או בקביעת מין הילדים (N=2, K=1, ניסויים חוזרים)

ב. האם אפשר להשתמש בגלגלי המזל כדי ללמוד מה קורה בהטלת קובייה אחת? בהטלת שתי קוביות ?

ג. במשפחה יש ארבעה ילדים, 3 בנות ובן. השתמשו בסימולציית גלגלי המזל לבדוק, בהנחה שההסתברות להולדת בנים ובנות שווה, מה השכיחות של מצב זה (פתרון א: ניקח 4 גלגלי מזל עם 2 מצבים, ונריץ 100 פעם ו 50,000 פעמים). האם יש מצבים אחרים עם אותה שכיחות יחסית? מה המצב השכיח ביותר?

4. דוגמה לפעילות חקר כיתתית תוך שימוש בסימולציות

1. מטילים פעם אחת קוביית משחק מאוזנת. מהי ההסתברות שיתקבל מספר זוגי גדול מ- 3?
2. נבחן תוצאה זו של הטלת קובייה תוך שימוש בסימולציה נתונה של גלגל מזל. (לדוגמא באתר NRICH)

השתמשו בסימולציה כדי "להטיל קובייה" עשר פעמים. כמה מתוך ההטלות קבלו ערך זוגי גדול מ 3? חזרו שוב על הניסוי עם עשר הטלות. האם התקבל אותו מספר? חזרו על הניסוי אך הפעם הטילו את הקובייה 100 פעמים. איזה חלק מתוך ההטלות קבלו ערך זוגי גדול מ 3? חזרו על הניסוי 50,000 פעמים. מה ניתן ללמוד מתוצאות הניסוי על ההסתברות לקבל מספר זוגי גדול מ-3 בהטלת קובייה?

.5

<u>דוגמה</u> (שאלון 806, קיץ תשע"ו שאלה 3)

(הסתברות מותנית)

במבחן כניסה למכללה 20% מן הנבחנים היו מקיבוצים.

40% היו ממושבים ו־ 40% היו מערים.

70% מן הנבחנים הצליחו במבחן.

$\frac{1}{8}$ מן הנבחנים שהיו ממושבים נכשלו במבחן.

ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מעיר וגם הצליח במבחן, גדולה פי 2.5 מן ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מקיבוץ וגם הצליח במבחן.

א. מבין הנבחנים שנכשלו במבחן, מהי ההסתברות לבחור באקראי נבחן שלא היה מעיר?

ב. (1) משה הצליח במבחן.

מהי ההסתברות שהוא לא היה ממושב?

(2) חמישה נבחנים הצליחו במבחן.

מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם היה ממושב?

.6

<u>דוגמה</u> (שאלון 806, קיץ תשע"ה שאלה 3)

(מאורע רב שלבי, בחירה ללא החזרה, הסתברות מותנית)

נתונה קבוצה של ספרות שונות: 3 ספרות הן זוגיות (שונות מ־ 0), והשאר הן ספרות אי־זוגיות.

יוני יוצר מספר דו־ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:

הספרה הראשונה שיוני בוחר באקראי היא ספרת העשרות,

והספרה השנייה שהוא בוחר באקראי היא ספרת היחידות.

יוני בוחר כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.

א. נתון כי ההסתברות שיוני ייצור מספר אי־זוגי היא $\frac{4}{7}$.

מהו מספר הספרות האי־זוגיות בקבוצה הנתונה?

ב. אם ידוע שהמספר שנוצר הוא זוגי, מהי ההסתברות ששתי הספרות שיוני בחר הן זוגיות?

אמילי יוצרת מספר תלת־ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:

הספרה הראשונה שאמילי בוחרת באקראי היא ספרת המאות,

הספרה השנייה שהיא בוחרת באקראי היא ספרת העשרות,

והספרה השלישית שהיא בוחרת באקראי היא ספרת היחידות.

אמילי בוחרת כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.

ג. ידוע כי הספרה הראשונה שאמילי בחרה היא זוגית.

מהי ההסתברות שבמספר התלת־ספרתי שאמילי יצרה, סכום הספרות היה זוגי?

דוגמאות לבעיות המדגימות אוריינות הסתברותית:

7. דוגמא:

בדיקה רפואית גילתה אצל אדם סימנים למחלה נדירה ששיעורה באוכלוסייה 0.1% . אך הבדיקה, כמו בדיקות רפואיות רבות אינה אמינה לחלוטין: היא מאתרת נכון 98% מהחולים ו- 96% מהבריאים. כלומר, היא מחטיאה 2% מהחולים וממיינת, בטעות, 4% מהבריאים כחולים.

א. לאור הידיעה על כך שהמחלה נדירה ושהאמינות של הבדיקה אינה מושלמת, עד כמה סביר שאדם שנבדק בבדיקה ואובחן כחולה, אכן חולה?

ב. כיצד תשתנה תשובתך לשאלה אם ידוע שאותו אדם שייך לאוכלוסייה שבה המחלה לא קיימת כלל?

ג. כיצד תשתנה תשובתך לו היה ידוע שהנבדק שייך לאוכלוסייה בה 50% חולים במחלה?

התשובה הלא אינטואיטיבית לסעיף א, של 2.4%, תידון בכיתה.

הערות לדוגמה 7

- אחת המטרות של שילוב שאלות מסוג זה היא העלאת המודעות לכך שהשיפוט האינטואיטיבי שלנו הוא לעתים מוטה, ושאנחנו יכולים לטעות פחות אם נהיה מודעים לחשיבותו של מידע שלעתים איננו נותנים לו את המשקל הראוי. לכן, בדיון יש מקום להסביר מדוע התשובה איננה אינטואיטיבית בשאלה זו ובשאלות דומות אנשים רבים מתעלמים מהשיעור הבסיסי של המחלה באוכלוסייה, ומתייחסים בעיקר לאמינות הגבוהה של הבדיקה. למעשה, רוב המקרים של אבחון אדם כחולה נובעים מהטעות בבדיקה ולא מהמחלה עצמה. אם נחשוב על מקרה קיצוני של אוכלוסייה שבה המחלה לא קיימת כלל, ההסתברות שאדם שאובחן כחולה הוא באמת חולה היא אפס.

- שאלה זו מדגימה את השינוי הדרמטי בהסתברות שאדם שאובחן כחולה אכן חולה בהתאם לשכיחות המחלה באוכלוסייה. בפרט, חשוב לזכור כי במידה ואדם נשלח לבדיקה באופן לא אקראי (למשל בשל סימני מחלה שונים) הרי ייתכן שהוא משתייך לאוכלוסייה בסיכון מוגבר (ראה למשל סעיף ג).

8. דוגמה נוספת לגבי הרשעת חשודים

ידוע שבעיר מסוימת 0.2% מהאוכלוסייה הם עבריינים והשאר הם אזרחים שומרי חוק. כמו כן ידוע שרק 4% מפסקי הדין של נאשמים חפים מפשע מסתיימים בהרשעה, לעומת 20% מפסקי הדין של עבריינים שמסתיימים בזיכוי.

א. תושב העיר הועמד למשפט והורשע. מה הסיכוי שהוא אכן עבריין? (3.1%)

ב. כיצד תשתנה תשובתכם אם מדובר בעיר בה כל פסקי הדין של עבריינים מסתיימים בהרשעה? (עדין התשובה מדהימה: 4.77% בלבד. נשים לב שהנתון שגם חלק מהעבריינים לא מורשעים לא משחק תפקיד מרכזי).

ג. כיצד תשתנה תשובתכם אם רק אחוז אחד מהמשפטים של נאשמים חפים מפשע היו מסתיימים בהרשאה?

ד. כיצד תשתנה תשובתכם אם יהיה מדובר בעיר שבה אחוז התושבים העבריינים הוא p? בדקו עבור ערכים שונים של p והסבירו את התוצאה.

גם בשאלה זו שתי הסוגיות של אינטואיציה מוטעית לגבי נוסחת בייס והנחות סמויות של הקורא באות לידי ביטוי - השיפוט האינטואיטיבי שלנו לא נותן משקל מספיק לשיעור הבסיסי הנמוך של העבריינים בקהילה. ההנחה הסמויה שאנו עושים היא שאדם לא נעצר באקראי אלה בנסיבות מחשידות, ואז כמובן ההסתברות של היותו קשור למעשה איננה אקראית.

ראו למשל את הדיון ב http://www.sci-princess.info/archives/885 על ההנחות שמניחים בכדי לחשב הסתברויות.

דוגמאות לבעיות ספירה שמטרתן לבנות את ההסבר למקדמים של נוסחת ברנולי להתפלגות בינומית

9. בארוחה עסקית במסעדה "טעימטיקה" ניתן לבחור אחת משתי מנות ראשונות, אחת מארבע מנות עיקריות ואחד מבין שלושה קינוחים.

בכמה אפשרויות ניתן להרכיב ארוחה עסקית במסעדה זו, בהנחה שבוחרים תמיד מנה ראשונה, מנה עיקרית וקינוח?

השאלה מדגימה שימוש בעיקרון הכפל

10. א. במשחק מחשב כל משחק יכול לבחור לו אווטאר מבין 6 דמויות שהמחשב מציע. 6 ילדים משתתפים במשחק. בכמה אופנים ניתן לבחור את הדמויות – דמות לכל משתתף?

ב. כיצד תשתנה תשובתכם אם המשחק מתקיים עם 4 משתתפים? k משתתפים ($k \le 6$)?

ג. בכמה אופנים יכולים k ילדים לבחור דמות לכל ילד אם יש n דמויות (? $k \le n$)

השאלה מדגימה ספירה של קבוצות סדורות. המטרה היא להבהיר באמצעות דוגמאות פשוטות, שאת הספירה הפשוטה $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ אפשר לכתוב גם כ- $\frac{6!}{2!}$.

כמובן שפשוט יותר לספור ללא נוסחה. מצד שני המטרה היא להוביל להבנת המקדמים $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ בנוסחת ברנולי, ולכן משולבים גם גם תרגילים עם משתנים.

11. א. קבוצת תלמידים נבחנה לקראת הופעת מחול ונמצאו 10 תלמידים מתאימים. בכמה דרכים ניתן לבחור מהם 3 תלמידים ל- 3 תפקידים שונים בהופעת המחול?

ב. כיצד תשתנה התשובה לשאלה הקודמת אם התלמידים ייבחרו ל- 3 תפקידים זהים?

מטרת השאלה היא להוביל להבנת תפקיד המרכיב !k בנוסחה $\frac{n!}{k!(n-k)!}$: כיוון שבסעיף השני מדובר בתפקידים זהים, מספר האפשרויות הצטמצם ב- !3.