פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות - כיתה י"ב

(לפחות 50 שעות)

מבוא

בפרק זה התלמידים יכירו שתי משפחות חדשות של פונקציות: פונקציות מעריכיות ופונקציות לוגריתמיות. פונקציות אלה מהוות מודל מתמטי לתיאור תהליכים רבים בטבע ובכלכלה.

במהלך הלימוד התלמידים ירחיבו את ידיעותיהם בחזקות, יכירו מושג חדש – לוגריתם ויעמיקו באלגברה של חזקות ולוגריתמים. התלמידים ישתמשו ויעמיקו בכלים ובמושגים שנלמדו בשנים הקודמות לצורך היכרות עם פונקציות חדשות. הבנת תכונות של פונקציות אלה חיונית לחקירת תהליכי גדילה ודעיכה מעריכיים בהם יעסקו התלמידים.

מטרות כלליות

1. הבנת תכונות של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות.
2. הכרת נגזרת של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ושימוש בנגזרת ככלי מתמטי לחקירת פונקציה ומציאת משוואת משיק.
3. הבנת הקשר בין פונקציה לפונקציית הנגזרת שלה.
4. שילוב עם המושגים והמיומנויות שנלמדו בכיתות י' ו- י"א בקדם אנליזה ובחשבון דיפרנציאלי.
5. הכרת האינטגרל (הלא מסוים והמסוים) שמוביל לפונקציה מעריכית או לוגריתמית. שילוב עם מושגים ומיומנויות שנלמדו בכיתה י"א בחשבון אינטגרלי.
6. הבנת המצבים בהם נעשה שימוש במודל של גדילה ודעיכה מעריכית לתיאור תופעות בטבע, חברה וכלכלה.
7. יישום תכונות של פונקציות חדשות לצורך פתרון שאלות שקשורות לגדילה ודעיכה מעריכית.

אלגברה - חזקות ולוגריתמים

קדם אנליזה של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות (לפחות 15 שעות)

תכנים – הכרת פונקציה מעריכית, משוואות ואי שוויונות מעריכיים

- חוקי חזקות: כל חוקי החזקות - כולל חזקה עם מעריך רציונלי.
- פונקציה מעריכית $f(x) = a^x$ (כאשר $a > 0$, $a \neq 1$) : תכונותיה (תחום הגדרה, נקודת החיתוך עם ציר ה-y, אסימפטוטה אופקית, עלייה/ירידה, חיוביות) ותיאורה הגרפי. השוואה בין תכונות של פונקציות מעריכיות שונות עבור ערכי a שונים.
- משוואות מעריכיות (על פי הנדרש ביישומים של חדו"א או בבעיות גדילה ודעיכה).
- אי-שוויונות מעריכיים פשוטים - אי-שוויונות שמהם ניתן להגיע לצורה $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ (a מספר קבוע, $a > 0$, $a \neq 1$) והמובילים לכל היותר לאי-שוויון ריבועי.

- טרנספורמציות של פונקציה מעריכית: הזזה אנכית, הזזה אופקית, שיקוף ביחס לצירים, מתיחה/כיווץ אנכיים, ערך מוחלט. שילובים שונים של הטרנספורמציות.

תכנים – לוגריתמים, הכרת פונקציה לוגריתמית, משוואות ואי שוויונות לוגריתמיים

- הגדרת הלוגריתם בבסיס כלשהו כאחת הפעולות ההפוכות לפעולת החזקה.
- חוקי הלוגריתמים: לוגריתם של מכפלה, מנה וחזקה.
- פונקציה לוגריתמית $f(x) = log_a x$ (כאשר $a > 0$, $a \neq 1$) : תכונותיה (תחום הגדרה, נקודת חיתוך עם ציר ה-x, אסימפטוטה אנכית, עלייה/ירידה, חיוביות/שליליות) ותיאורה הגרפי. השוואה בין תכונות של פונקציות לוגריתמיות שונות עבור ערכי a שונים.
- משוואות לוגריתמיות (על פי הנדרש ביישומים של חדו"א או בבעיות גדילה ודעיכה).
- אי-שוויונות פשוטים - אי-שוויונות שמהם ניתן להגיע לצורה $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$ (a מספר קבוע, $a > 0$, $a \neq 1$) כאשר הפונקציות f ו- g הן פונקציות פשוטות, אשר מובילות לכל היותר לאי שוויון ריבועי.
- טרנספורמציות של פונקציה לוגריתמית: הזזה אנכית, הזזה אופקית, שיקוף ביחס לצירים, מתיחה/כיווץ אנכיים, ערך מוחלט. שילובים שונים של הטרנספורמציות.

בעיות גדילה ודעיכה (לפחות 10 שעות)

- הכרת תהליכים רב שלביים שבהם כמות גדלה או קטנה ביחס קבוע משלב לשלב או שהשינוי בא לידי ביטוי על ידי הוספה או הפחתה של אחוז קבוע בכל שלב.
- קביעת יחידת זמן אחידה בתהליכים מעריכיים.
- תיאור של תהליך הגדילה והדעיכה באמצעות הפונקציה (ייצוג אלגברי וגרפי) : $f(t) = f(0) \cdot q^t$. מציאת כמויות וזמנים בעזרת שימוש בפונקציה ופתרון משוואות ואי שוויונות מסוגים שונים.
- זמן מחצית חיים.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות (לפחות 25 שעות)

חשבון דיפרנציאלי

הכרת המספר **e**.

פונקציות מהסוגים הבאים:

- פונקציות מעריכיות ופונקציות לוגריתמיות עם בסיס e
- פונקציות מעריכיות מורכבות מהצורה $g(x) = e^{f(x)}$ כאשר $f(x)$ פולינום

- פונקציות לוגריתמיות מורכבות מהצורה $g(x) = lnf(x)$ כאשר $f(x)$ פונקציית פולינום לכל היותר ממעלה שנייה

- שילוב של הפונקציות הנ"ל עם פונקציות פולינום ופונקציות רציונליות: סכום, מכפלה, מנה, פונקציה מורכבת.

נגזרת של הפונקציות האלו (כולל נגזרת של סכום, מכפלה, מנה, פונקציה מורכבת (שני שלבים בלבד)).

עבור כל הפונקציות:

- תחום הגדרה.
- משוואת משיק לגרף בנקודה שעל גרף הפונקציה.
- נקודות חיתוך עם הצירים.
- תחומי עלייה וירידה.
- נקודות קיצון (מקומי ומוחלט).
- תחומי חיוביות ושליליות.
- זוגיות או אי זוגיות – הוכחה באופן אלגברי והמשמעות הגרפית.
- התנהגות בסביבת נקודת אי-הגדרה ומציאת אסימפטוטות מאונכות לציר ה-x של פונקציות מהסוג ($g(x) = \ln(f(x))$ כאשר $f(x)$ פונקציית פולינום, לכל היותר ממעלה שנייה) ופונקציות מנה (פרט לנקודות אי רציפות סליקה).
- מציאת אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y עבור הפונקציה: $f(x) = e^x$ והטרנספורמציות של $f(x)$ במסגרת התוכנית.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- הקשר בין גרף הפונקציה ובין גרף הנגזרת שלה.
- זיהוי גרפים של פונקציות או גרפים של נגזרות של פונקציות.

  הגרפים יכולים לכלול נקודות אי רציפות סליקה, ובמקרים אלה הזיהוי ייעשה בעזרת תכונות הפונקציות או הנגזרות של הפונקציות שנלמדו (ללא מציאת נקודות אי רציפות סליקה).
- שימוש בפרמטר: מציאת ערך פרמטר על סמך הנתון. ייעשה שימוש בפרמטר אחד בשאלה.
- שילוב מושגים ומיומנויות שנלמדו בקדם אנליזה של כיתה י' ו- י"א (כולל פעולות על פונקציה: הזזה אנכית, הזזה אופקית, שיקופים ביחס לצירים, מתיחה וכיווץ אנכיים, ערך מוחלט ושילובם).

הערה: מושג הנגזרת השנייה - מחוץ לתוכנית הלימודים של 4 יח"ל.

חשבון אינטגרלי

אינטגרל של הפונקציות: $e^{f(x)}$, e^x , $\frac{1}{f(x)}$, $\frac{1}{x}$ כאשר $f(x)$ ליניארית.

עבור הפונקציות הנ"ל:

- מציאת פונקציה קדומה.

- מציאת פונקציה קדומה על פי הנגזרת ונקודה על גרף הפונקציה.

- אינטגרל מסוים.

- חישוב שטח בין גרף הפונקציה לציר x (הפונקציה יכולה להיות חיובית, שלילית או לשנות סימן).

- חישוב שטח בין גרפים של שתי פונקציות וחישוב שטחים מורכבים.

- שימוש בפרמטר: מציאת ערך פרמטר על סמך נתון. ייעשה שימוש בפרמטר אחד בשאלה.

קדם אנליזה של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות - דוגמאות

<u>דוגמה 1</u>

1. סרטטו סקיצה של הפונקציה: $f(x) = 3^x$
2. סרטטו סקיצה של הפונקציה: $g(x) = 3^{x-1}$
3. סרטטו סקיצה של הפונקציה: $h(x) = -2\cdot3^{x-1}$
4. סרטטו סקיצה של הפונקציה: $q(x) = -2\cdot3^{x-1} + 4$

<u>דוגמה 2</u>

1. סרטטו, באותה מערכת צירים, את שתי הפונקציות: $f(x) = 2^x, g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
2. השוו את שתי הפונקציות תוך התייחסות לתכונותיהן: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי חיוביות / שליליות, תחומי עלייה / ירידה, אסימפטוטות.

<u>דוגמה 3</u>

1. סרטטו סקיצה של הפונקציה: $f(x) = log(x)$
2. סרטטו סקיצה של הפונקציה: $f(x) = log(x - 1)$
3. סרטטו סקיצה של הפונקציה: $f(x) = 3 \cdot log(x)$
4. סרטטו סקיצה של הפונקציה: $f(x) = 3 \cdot log(x) + 4$

<u>דוגמה 4</u>

1. סרטטו, באותה מערכת צירים, את שתי הפונקציות: $f(x) = log_2 x , f(x) = log_{\frac{1}{2}} x$
2. השוו את שתי הפונקציות תוך התייחסות לתכונותיהן: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי חיוביות / שליליות, תחומי עלייה / ירידה, אסימפטוטות.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי - דוגמאות

דוגמה 1

שילוב בין פונקציה מעריכית לבין פונקציה פולינומיאלית, קשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת.

1. חקרו את הפונקציה: $f(x) = x \cdot e^{2x}$ (תחום הגדרה, נקודת החיתוך עם הצירים, נקודת הקיצון, תחומי עלייה וירידה, תחומי חיוביות ושליליות) וסרטטו סקיצה שלה.
2. סרטטו סקיצה של הפונקציה: $g(x) = f\,'(x)$.

דוגמה 2

שילוב בין פונקציה מעריכית לבין פונקציה פולינומיאלית, מציאת פרמטר.

גרף הפונקציה: $f(x) = (x^2 + ax + 1) \cdot e^{-x}$ נפגש עם ציר ה- x בנקודה שבה $x = -1$.

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. חשבו את הערך של הפרמטר a.
3. חקרו את הפונקציה (נקודות החיתוך עם הצירים, נקודות הקיצון, תחומי עלייה וירידה, תחומי חיוביות ושליליות).
4. ידוע שלפונקציה יש אסימפטוטה אופקית $y = 0$. סרטטו סקיצה של הפונקציה.

דוגמה 3

חקירת פונקציה מעריכית, טרנספורמציה של פונקציה

נתונה הפונקצייה $f(x) = (4 - 3x) \cdot e^{3x}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$?

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ג. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

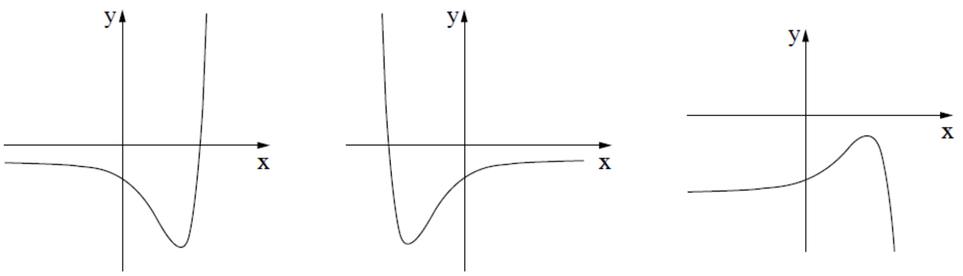
(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = -2 \cdot f(x) - 1$.

ה. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) אחד מן הגרפים I–III שלפניכם מתאר את גרף הפונקצייה $g(x)$. קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.



III II I

דוגמה 4

חקירת פונקציה מעריכית, קשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת, חישוב שטח באמצעות אינטגרל מסוים

נתונה הפונקציה $f(x)=e^{x^2-x+1}$. נתון: $g(x)=f'(x)$.

א. (1) מצא את משוואת הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(3) מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

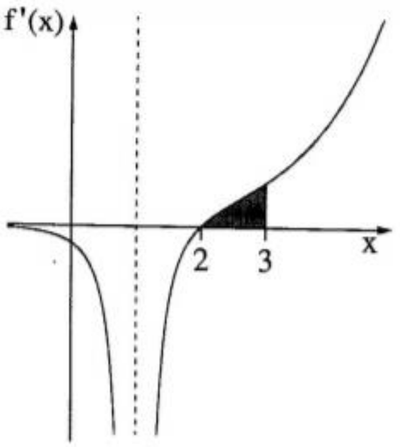
(4) הראה שהפונקציה $g(x)$ עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי הצירים.

דוגמה 5

שילוב בין פונקציה מעריכית לפונקציה רציונלית, פונקציה הנתונה בצורה פרמטרית, קשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת.



בציור שלפניך מוצג גרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)=\frac{e^{x-2}}{x-c}$. c הוא פרמטר.

היעזר בנתונים מן הציור וענה על הסעיפים א-ד.

א. גזור את הפונקציה $f(x)$ וחשב את c .

הצב $c=1$ וענה על הסעיפים ב-ד.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה־ x בתחום $2\le x\le 3$ (השטח האפור בציור). תוכל להשאיר e בתשובתך.

דוגמה 6

חקירת פונקציה מעריכית, חישוב שטח באמצעות אינטגרל מסוים

נתונה הפונקצייה $f(x)=e^x\cdot(e^x-6)^2$ המוגדרת לכל x.

א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ב. הראו כי מתקיים: $f(x)=e^{3x}-12e^{2x}+36e^x$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=e^{3x}$ העולה לכל x.

ה. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $g(x)$.

(2) באותה מערכת צירים שבה סרטטתם את גרף הפונקצייה $f(x)$, סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$ בקו מקווקו.

(3) מצאו את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקצייה $f(x)$, על ידי הגרף של הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה־ y.

דוגמה 7

פונקציה לוגריתמית, קשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת.

נתונה הפונקציה $f(x)=(\ell nx)^2-2\ell nx$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ג. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. מצא את התחום שבו גם $f(x)$ חיובית וגם $f'(x)$ חיובית.

ו. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x)=f(x)$ בתחום $x>0$.

מצא את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של $g(x)$, וקבע את סוגן.

דוגמה 8

חקירה של פונקציה המשלבת בין פונקציה לוגריתמית לבין פונקציה רציונלית, מציאת פרמטר, זיהוי גרף.

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x}{\ell nx - a}$. $a > 0$ הוא פרמטר.

נתון: הישר $y = 2x$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = e^3$.

א. מצא את a .

הצב $a = 2$ וענה על הסעיפים ב-ג.

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

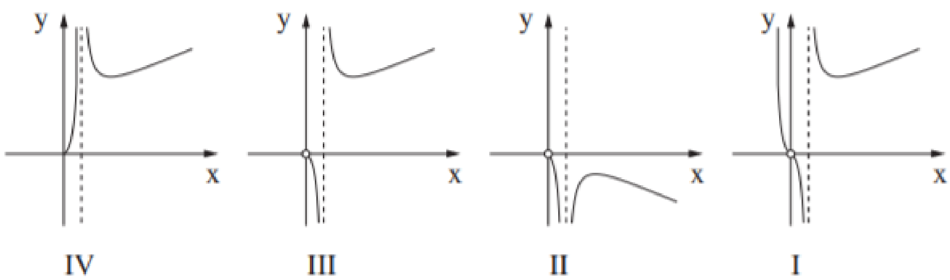
(2) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המאונכת לציר ה־ x .

(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(5) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ג. לפניך ארבעה גרפים, IV-I . איזה מהם הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$? נמק.



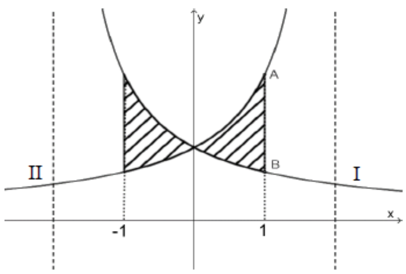
דוגמה 9

חישוב אינטגרל שמוביל לפונקציה לוגריתמית, מציאת פרמטר

לפניך הגרפים של הפונקציות:

$f(x) = \frac{k}{2-x}$ ו- $g(x) = \frac{k}{2+x}$ עבור $y > 0$. k הוא פרמטר חיובי.

א. התאם בין הגרפים I ו- II ובין הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$. נמק.



הישר $x = 1$ חותך את גרף II בנקודה A

ואת גרף I בנקודה B.

נתון כי אורך הקטע AB הוא 2.

ב. חשב את הערך של k.

הצב k=3 וענה על הסעיפים ג – ה.

ג. מצא את שיעורי נקודת החיתוך בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

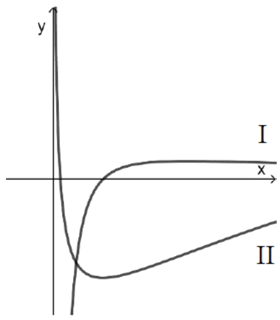
ד. חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$

והישרים $x = -1$ ו- $x = 1$ (השטח המקווקו בציור).

ה. קבע אם הטענה הבאה נכונה, ונמק את קביעתך : $\int_{-1}^{1}(f(x) - g(x))\,dx = 0$

דוגמה 10

זיהוי גרף הפונקציה וגרף הנגזרת, חקירה של פונקציה לוגריתמית, חישוב שטח, אינטגרל של פונקציית נגזרת כאשר ידועה הפונקציה הקדומה.



בציור שלפניך מוצגים הגרפים של הפונקציה $f(x)$ ושל פונקציית הנגזרת $f'(x)$, הגרפים I, II.

א. איזה גרף מתאים ל- $f(x)$ ואיזה גרף מתאים ל- $f'(x)$? נמק.

נתונה הפונקציה $f(x) = (lnx)^2 - 4$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הישר $x = e$ וציר ה- x.

דוגמה 11

חקירה של פונקציה לוגריתמית (מורכבת), מציאת פרמטר, אסימפטוטות מאונכות לציר ה–x, טרנספורמציה של פונקציה, בדיקת זוגיות/אי זוגיות של פונקציה.

נתונה הפונקציה $f(x) = 2\,ln(x^2 - a)$, a פרמטר חיובי.

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = 5$ שווה ל- 1.25.

א. מצא את a.

הצב $a = 9$ וענה על הסעיפים הבאים:

ב. (1) רשום את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = f(x-4)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. האם הפונקציה $g(x)$ זוגית/ אי זוגית/ או לא זוגית ולא אי זוגית? נמק.

גדילה ודעיכה - דוגמאות

דוגמה 1

דנה הפקידה סכום של 20,000 שקלים בתוכנית חיסכון בבנק לפי ריבית של 4% לשנה.

1. מה היה הסכום בתוכנית לאחר 5 שנים?

לאחר 5 שנות החיסכון הוסיפה דנה לסכום שהצטבר בתוכנית עוד 6,000 שקלים, והמשיכה באותה תכנית חיסכון.

2. לאחר הוספת הכסף, כעבור כמה שנים יהיה בתוכנית החיסכון סכום של 39,916 שקלים?
3. לאחר הוספת הכסף, כעבור כמה שנים יגדל הסכום שבתוכנית פי 3 ?

דוגמה 2

מ- 100 גרם חומר רדיואקטיבי I נשארו כעבור 4 שנים 72 גרם שלא התפרקו.

א. מצא את זמן מחצית החיים של חומר I .

זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי II גדול פי 2 מזמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי I .

ב. מצא באיזה אחוז קטֵנה כל שנה כמות החומר II .

ג. מצא את הכמות של חומר II שממנה יישארו 80 גרם כעבור 4 שנים.

דוגמה 3

הערך של מכונית א' כיום הוא 60,000 שקל, והוא יורד בכל שנה ב- 8% לעומת הערך שלה בשנה הקודמת.

הערך של מכונית ב' כיום הוא 79,000 שקל, והוא יורד בכל שנה באחוז קבוע לעומת הערך שלה בשנה הקודמת.

ידוע כי בעוד 10 שנים הערך של שתי המכוניות יהיה שווה.

א. באיזה אחוז יורד הערך של מכונית ב' בכל שנה?

ב. כמה שנים אחרי השנה שבה הערך של שתי המכוניות היה שווה, יהיה הערך של מכונית ב' $\frac{4}{5}$ מהערך של מכונית א'? (הירידה בערך המכוניות בכל שנה אינה משתנה.)

דוגמה 4

בתחילת שנת 2020 התגלה נגיף ביישוב מסוים.

מספר החולים ביישוב עלה בקצב מעריכי קבוע.

כשהתגלה הנגיף היו ביישוב 104 חולים בנגיף, וכעבור חמישה חודשים היו ביישוב 200 חולים בנגיף.

ביום שבו אובחנו ביישוב 200 חולים בנגיף, חוסנה כל האוכלוסייה ביישוב נגד אותו הנגיף.

מאותו יום, ירד מספר החולים בנגיף ביישוב בקצב מעריכי קבוע.

אחרי 3 חודשים ממתן החיסון, היה מספר החולים בנגיף ביישוב 40% ממספרם לפני מתן החיסון.

א. מזמן גילוי הנגיף ועד למתן החיסון לאוכלוסיית היישוב, פי כמה עלה מספר החולים בנגיף בכל חודש?

ב. מצא את האחוז הקבוע שבו ירד מספר החולים בנגיף ביישוב בכל חודש מאז מתן החיסון.

ג. **(1)** כמה חודשים עברו מזמן גילוי הנגיף ועד היום שבו אובחנו 20 חולים בלבד בנגיף?

(2) אם האוכלוסייה ביישוב לא הייתה מתחסנת, וקצב העלייה במספר החולים לא היה משתנה, מה היה בערך מספר החולים ביישוב באותה תקופת זמן שמצאת בתת־סעיף ג(1)?

דוגמה 5

בבנק מסחרי יש שני סוגים של חוב: חוב של הבנק ללקוח (כאשר הלקוח מפקיד כסף בבנק) וחוב של הלקוח לבנק (כאשר הבנק מלווה כסף ללקוח). בבנק מסחרי מסוים, כאשר הבנק חייב כסף ללקוח, הוא משלם ללקוח ריבית בגובה של 1.5% מן החוב בכל שנה.

בתחילת שנת 2023 הפקיד דני בבנק 10,000 ש"ח.

א. איזו מבין הפונקציות 4–1 שלפניכם מתארת את גובה החוב של הבנק לדני לפי השנים (t) ?

(1) $f(t) = 10{,}000 \cdot 1.015^t$

(2) $f(t) = 10{,}150 \cdot 1.02^t$

(3) $f(t) = 10{,}150 \cdot 2^t$

(4) $f(t) = 10{,}000 \cdot 1.5^t$

ב. כמה כסף יהיה הבנק חייב לדני כעבור 20 שנה מן היום שבו הפקיד דני את הכסף?

כאשר הבנק הזה מלווה כסף ללקוח, הוא גובה ממנו ריבית של 15% מגובה החוב בכל שנה.

בתחילת שנת 2023 לוותה יעל 1,000 ש"ח מן הבנק.

ג. מצאו את הפונקציה $g(t)$ המתארת את גובה החוב של יעל לבנק לפי השנים (t) .

ד. בסרטוט שבסוף השאלה מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(t)$ ושל הפונקציה $g(t)$.

איזו פונקציה מתאר הקו המקווקו? נמקו.

בתחילת כל שנה הבנק מברר את המאזן שלו: כמה כסף לקוחותיו חייבים לו, וכמה כסף הוא חייב ללקוחותיו.

ה. בתחילתה של איזו שנה יגלה הבנק שהחוב שלו לדני קטן מן החוב של יעל לבנק?